



**INSTITUTO DE FÍSICA**  
Universidade Federal Fluminense

# Física IV

**Instrutor: Prof. Daniel Jonathan**

**Sala: 507 (IF, torre nova, 5º andar)**

**Email: [jonathan@if.uff.br](mailto:jonathan@if.uff.br)**

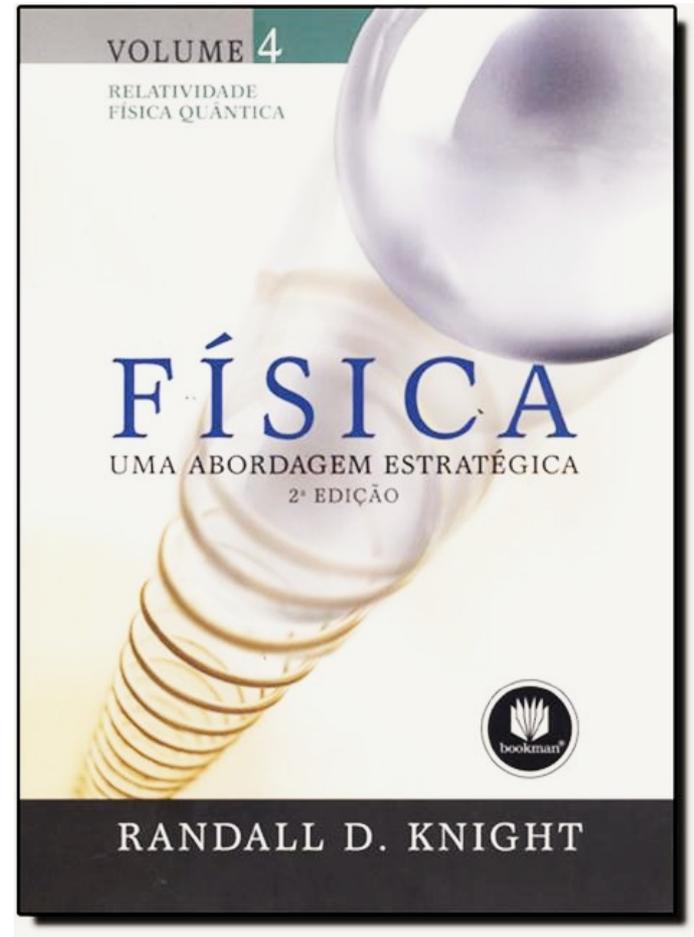
**Site do curso: [http://cursos.if.uff.br/fisicaIV\\_XXI\\_0215/](http://cursos.if.uff.br/fisicaIV_XXI_0215/)**

**Twitter do curso: [@fisica4uff](https://twitter.com/fisica4uff)**

# Livro-texto principal

“Física, uma abordagem estratégica”, vol. 4  
Randall L. Knight

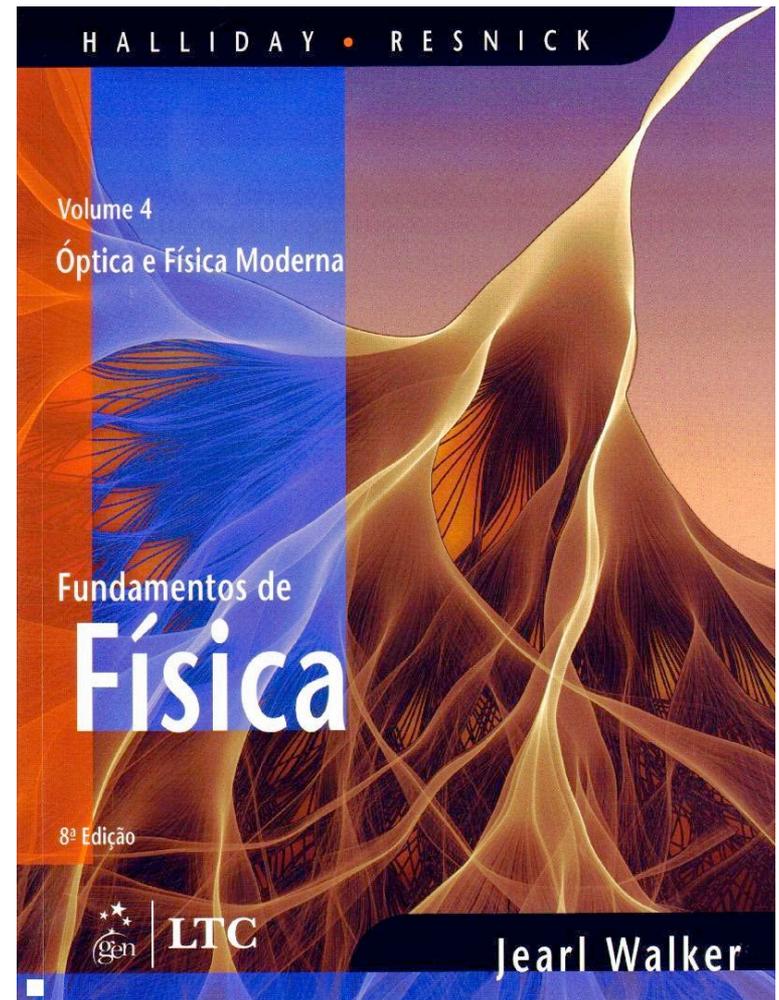
Caps. 37 – 43



# Livro-texto secundário

Usaremos para parte do conteúdo da P3

“Fundamentos de Física,  
vol. 4”, 8a ed.  
Halliday, Resnick e Walker  
caps. 41 e 43



# Calendário – 2p15 – 2<sup>a</sup>/4<sup>a</sup>

	Seg.	Ter.	Qua.	Qui	Sex	Sab.
Novembro	23	24	25	26	27	
Dezembro	30	1	2	3	4	
	7	8	9	10	11	
	14	15	MT1 16	17	18	
	21	22	23	Recesso 24	Recesso 25	
	Recesso 28	Recesso 29	Recesso 30	Recesso 31	Recesso 1	
Janeiro	4	5	MT2 6	7	8	P1 9
	11	12	13	14	15	
	18	19	20	21	22	
	25	26	27	28	29	
Fevereiro	MT3 1	2	3	4	5	
	Recesso 8	Recesso 9	Recesso 10	11	12	
	15	16	MT4 17	18	19	P2 20
	22	23	24	25	26	
Março	29	1	MT5 2	3	4	
	7	8	9	10	11	
	14	15	MT6 16	17	18	P3 19
	21	22	23	24	Feriado 25	VR 26
	28	29	30	31	1	VS 2
Abril	4	5	22	23		

**Período Letivo:**  
25/nov de 2015: início  
02/abril de 2016: Fim

## Tópicos

### P1

Relatividade

O fim da física clássica

Quantização

Revisão

### P2

Funções de onda e incerteza

Mecânica Quântica Unidimensional

Física atômica

Revisão

### P3

Física nuclear

Energia nuclear (Halliday)

Condução elétrica nos sólidos (Halliday)

Revisão

# Avaliação

Provas (3) : 20Q de múltipla escolha

MiniTestes (2 por prova) : 1Q discursiva da lista de exs.

Testes de Leitura (1 por aula): 5Q de multipla escolha

**Nota final = (Média 3 Provas) x 85%**

**+ (Média 6 MiniTestes\*) x 10%**

**+ (Média Testes de Leitura\*\*) x 5%**

\* descontando pior nota

\*\* descontando 6 piores notas

# Método do curso: *peer instruction* (*instrução pelos colegas*)

1) **Em sala**: explicações **resumidas** do material no livro (sem repetir derivações), entremeadas por **testes conceituais** de múltipla escolha. Estes envolvem pouca ou nenhuma matemática, e **não valem nota**.

Funcionam assim:

- i) **Eu apresento um problema**, você tem um tempo para pensar, e depois uma votação é feita usando cartões-resposta especiais

# Método do curso: *peer instruction* (*instrução pelos colegas*)

1) **Em sala**: explicações **resumidas** do material no livro (sem repetir derivações), entremeadas por **testes conceituais** de múltipla escolha. Estes envolvem pouca ou nenhuma matemática, e **não valem nota**.

Funcionam assim:

- i) **Eu apresento um problema**, você tem um tempo para pensar, e depois uma votação é feita usando cartões-resposta especiais
- ii) **Você discute com um colega**, cada um tenta convencer o outro de que a sua resposta é a correta

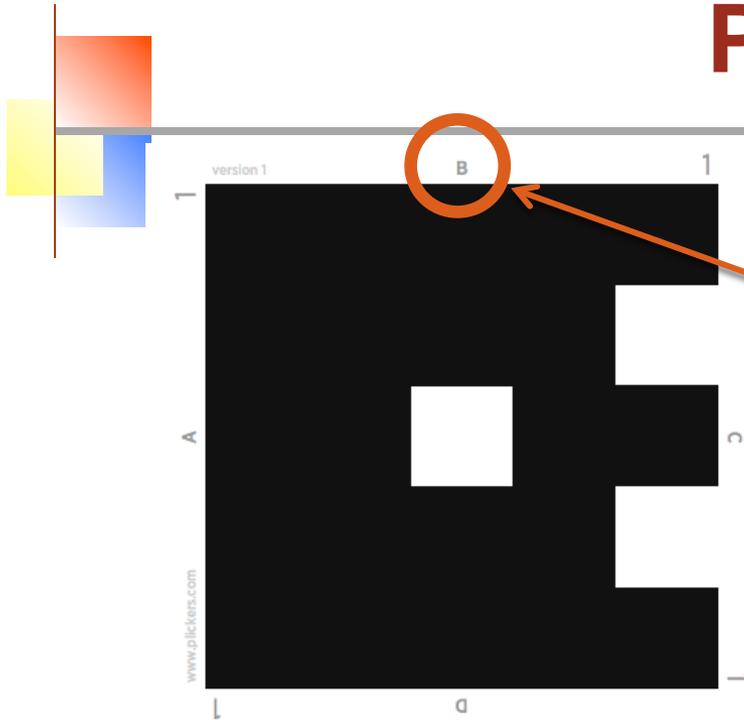
# Método do curso: *peer instruction* (*instrução pelos colegas*)

1) **Em sala**: explicações **resumidas** do material no livro (sem repetir derivações), entremeadas por **testes conceituais** de múltipla escolha. Estes envolvem pouca ou nenhuma matemática, e **não valem nota**.

Funcionam assim:

- i) **Eu apresento um problema**, você tem um tempo para pensar, e depois uma votação é feita usando cartões-resposta especiais
- ii) **Você discute com um colega**, cada um tenta convencer o outro de que a sua resposta é a correta
- iii) **Fazemos uma segunda votação**. Se agora a maioria acertar, passamos para o próximo tópico. Se a maioria erra discutimos a resposta correta, e se possível eu apresento outra questão conceitual sobre o mesmo tema.

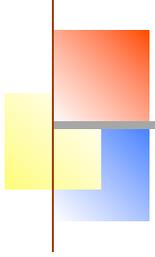
# Plickers



- 64 cartões, todos diferentes
- Resposta levantando o cartão com sua resposta virada pra cima
- Letras pequenas de propósito (p/ seu colega não ver sua resposta!)

**Eu escaneio a turma usando um aplicativo no celular**





# Plickers

---

**O quanto você já sabe sobre a Teoria da Relatividade?**

**A) Tem a ver com um tal de Einstein.**

**B) Já li ou vi alguma coisa em revistas / livros de divulgação / TV / internet. Sei que envolve a velocidade da luz e  $E=mc^2$ .**

**C) Já estudei antes num livro de Física.**

**D) Eu poderia estar dando esse curso.**

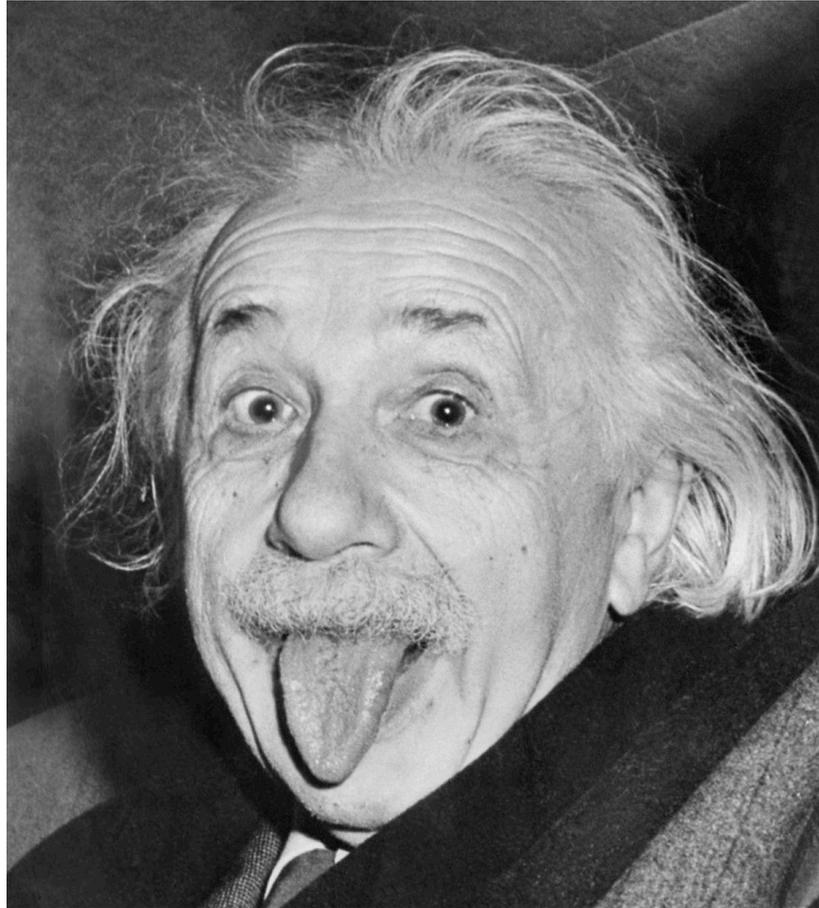
# **Método do curso: *peer instruction*** **(*instrução pelos colegas*)**

2) **Antes da aula:** Você deve ler o livro e responder um teste de leitura online, valendo nota.

## **Como funciona:**

- a) Vá no site (ou twitter) do curso e clique no link do teste.
- b) Faça login com seu email do iduff ([xxx@id.uff.br](mailto:xxx@id.uff.br))
- c) Preencha suas respostas: são cinco questões de múltipla escolha (valendo nota), mais um campo (obrigatório, mas sem valer nota) para você comentar sobre o que gostou/não gostou/não entendeu/quer saber.
- d) Envie até meia hora antes do horário da aula

# Relatividade

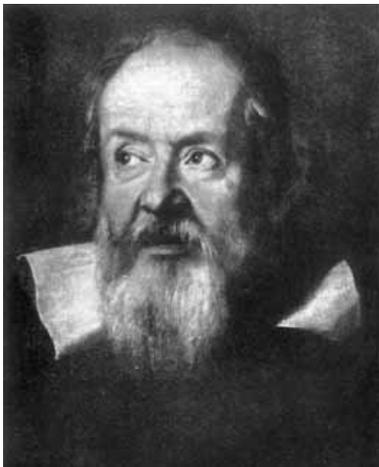


**A. Einstein (1879 – 1955)**

# Relatividade



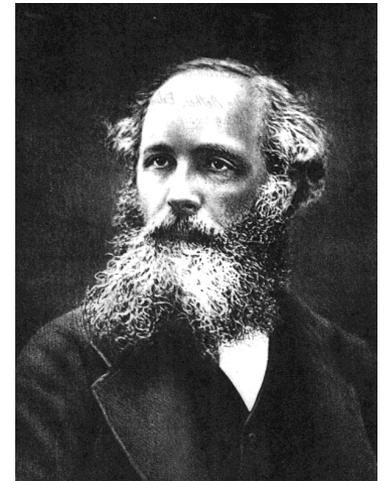
**A. Einstein em 1905, aos 26 anos**



**G. Galilei**



**I. Newton**

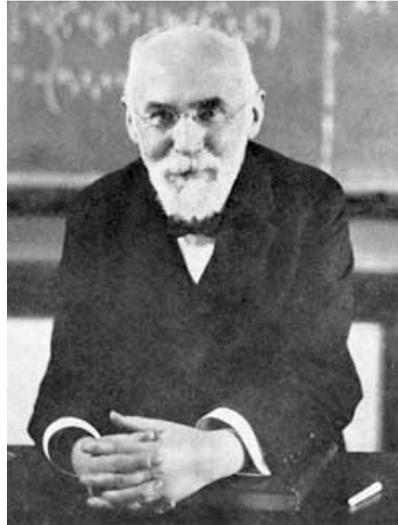


**J.C. Maxwell**

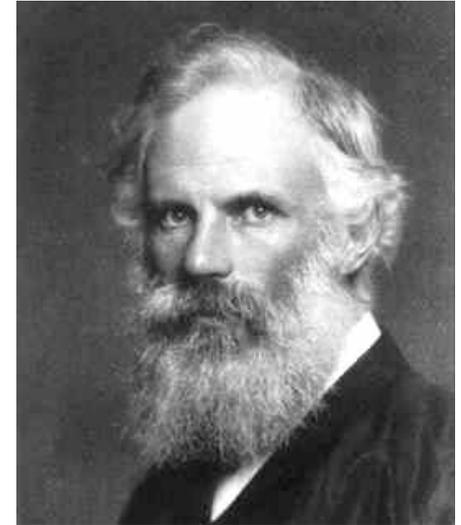
# Outros personagens dessa história



**Poincaré**



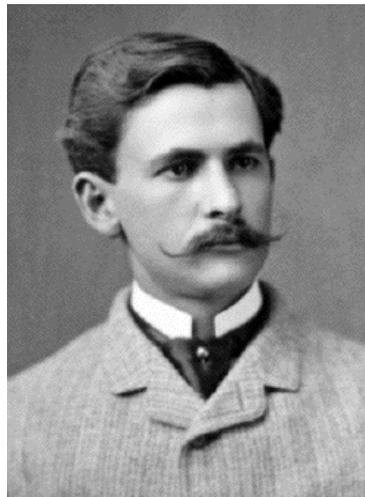
**Lorentz**



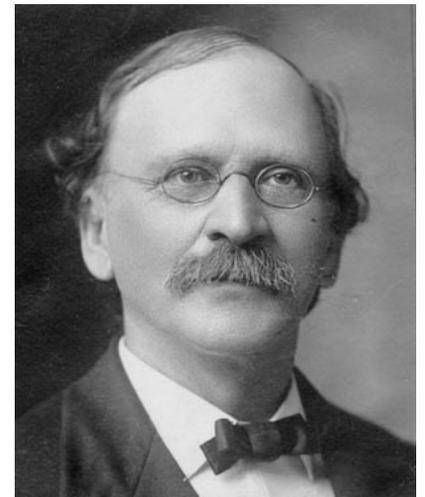
**FitzGerald**



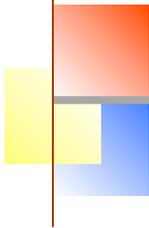
**Minkowski**



**Michelson**



**Morley**



# Teste conceitual

---

**Você está sentado em um compartimento sem janelas, à prova de som e vibração, dentro de um avião. Considere os seguintes movimentos possíveis do avião:**

- 1) Faz uma curva para a esquerda, mantendo velocidade constante**
- 2) Começa a subir, mantendo velocidade constante**
- 3) Voa em linha reta com velocidade constante**
- 4) Voa em linha reta com aceleração constante**

**Quais desses movimentos podem ser detectados por você?**

- A) somente 4    B) 2 e 4    C) 1,2 e 4    D) 1, 2, 3 e 4**

# A Relatividade de Galileu



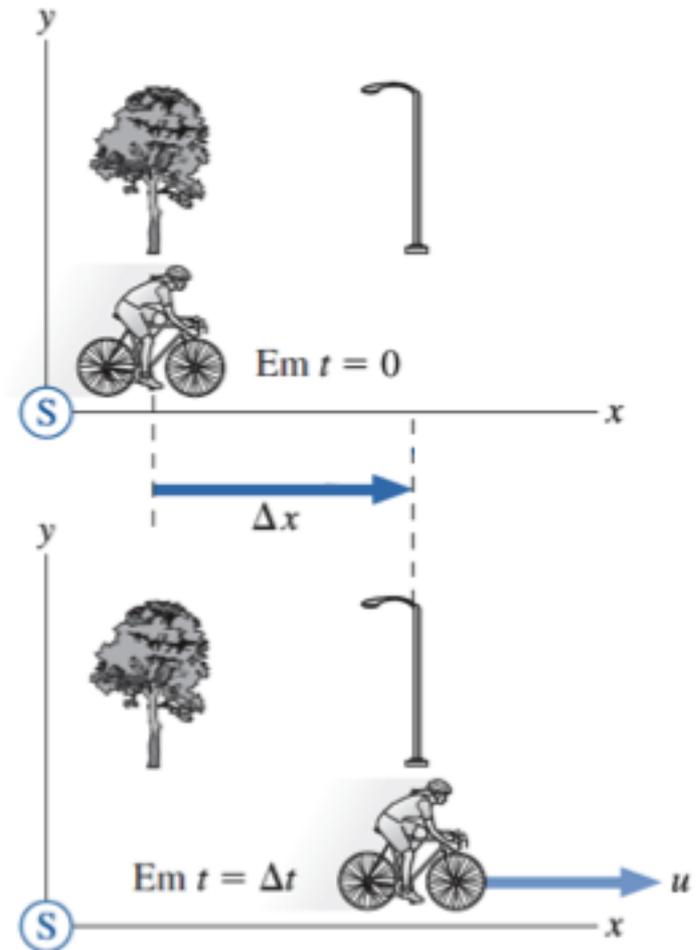
- O princípio da relatividade de Galileu Galilei é descrito em seu livro "Diálogos sobre dois sistemas máximos do mundo" (1632).
- **Pergunta:** uma pessoa em uma cabine fechada de um navio em movimento é ou não capaz de perceber este movimento pela observação do comportamento de pêndulos, molas ou outros sistemas mecânicos?

***"...(desde que o movimento seja uniforme e não flutuante para um lado e para outro) você não perceberá a menor modificação dos efeitos mencionados, e nem de algum deles poderá concluir se o navio se move ou está parado ..."***

**Conclusão: a velocidade de um objeto não é absoluta, mas relativa a um referencial**

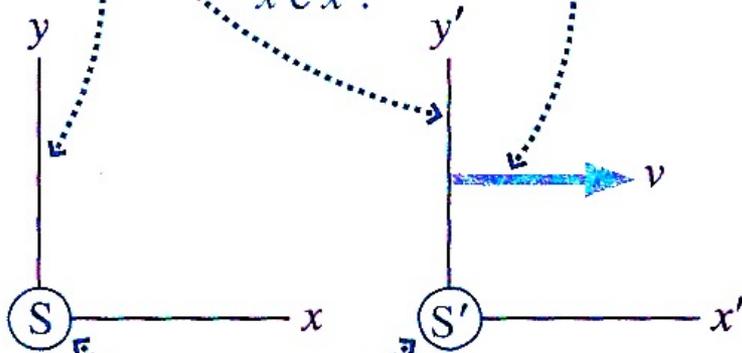
# Referenciais

**Referencial: sistema de coordenadas em que observadores em repouso medem as posições e o tempo de objetos em movimento**

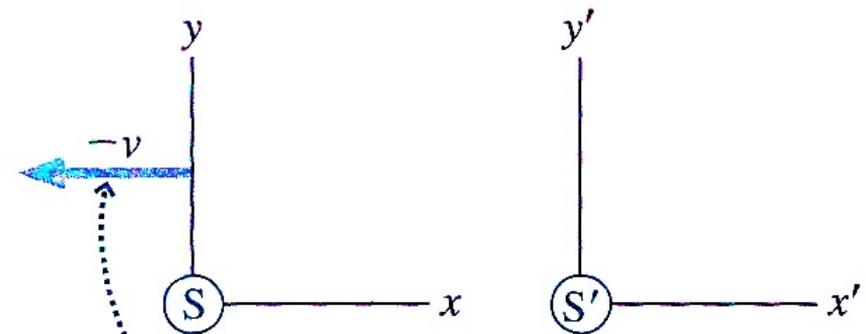


# Referenciais

1. Os eixos de  $S$  e  $S'$  têm a mesma orientação.
2. O referencial  $S'$  move-se com velocidade  $v$  em relação ao referencial  $S$ . O movimento relativo ocorre ao longo dos eixos  $x$  e  $x'$ .

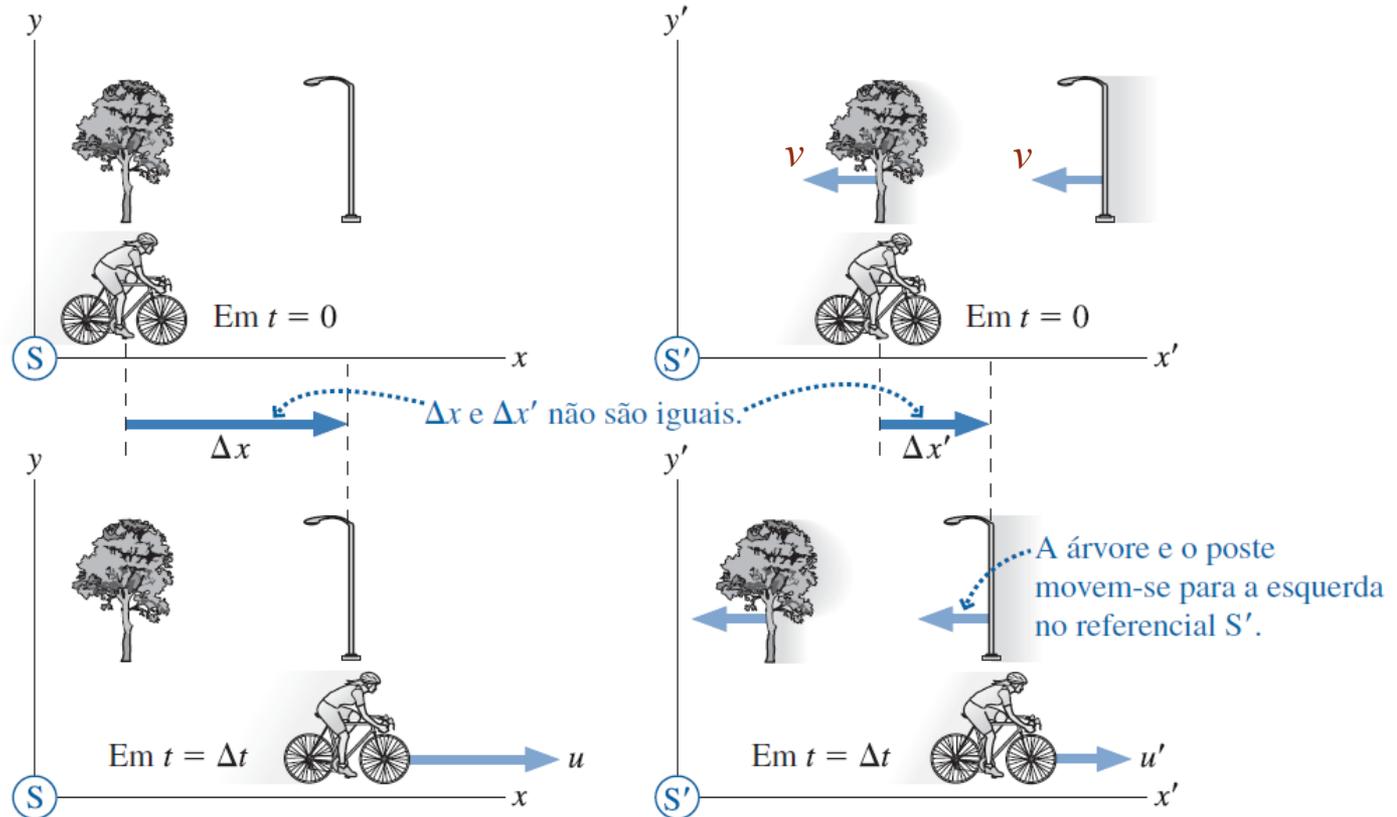


3. As origens de  $S$  e  $S'$  coincidem no instante  $t = 0$ . Essa é a nossa definição de  $t = 0$ .



4. O referencial  $S$  move-se com velocidade  $-v$  em relação ao referencial  $S'$ .

# Transformações de Galileu



$$x = x' + vt$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

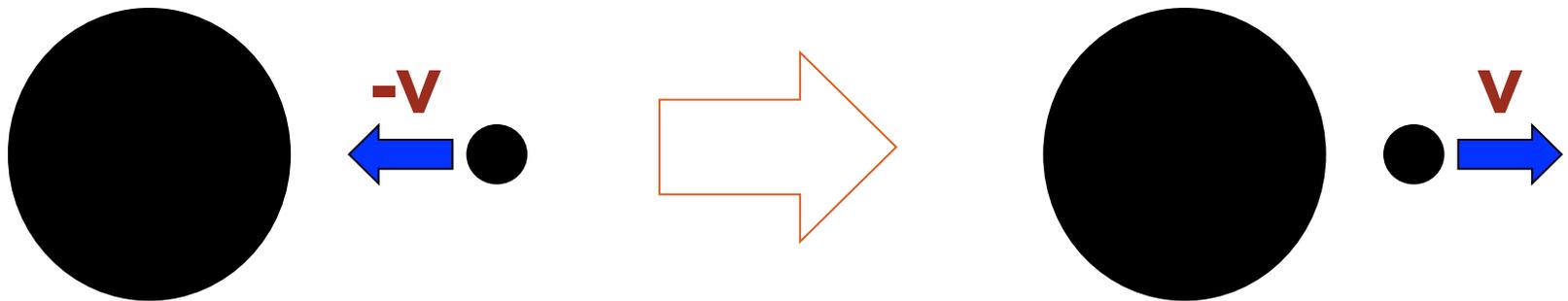
$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v = u'_x + v$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} = u'_y$$

$$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} = u'_z$$

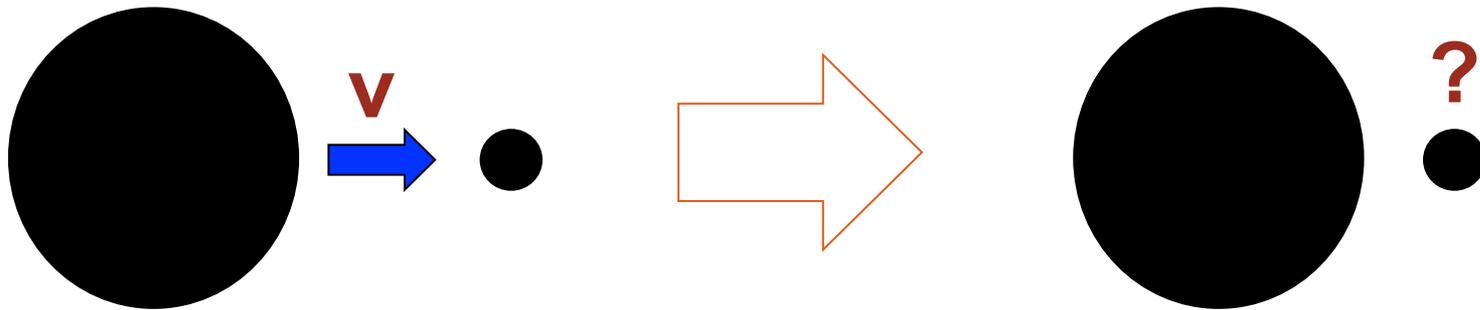
# Teste conceitual: referenciais

Se uma bola pequena colide com outra grande e pesada, inicialmente em repouso, sabemos que esta última continua praticamente em repouso, enquanto a bola pequena quica de volta praticamente com a mesma velocidade inicial



# Teste conceitual: referenciais

Suponha agora que a bola grande, de massa  $M$ , se movendo com velocidade  $v$ , atinge a bola pequena, de massa  $m$ , que está em repouso.



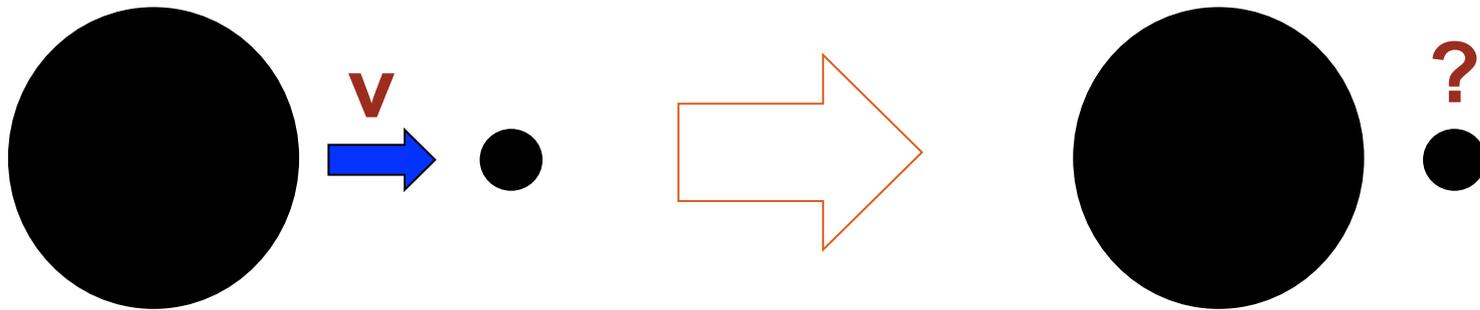
Após a colisão, o momento linear da bola pequena será

- A)  $Mv$     B)  $2Mv$     C)  $mv$     D)  $2mv$

Dica: mude para outro referencial, resolva o problema lá, depois retorne para o referencial inicial

# Teste conceitual: referenciais

Suponha agora que a bola grande, de massa  $M$ , se movendo com velocidade  $v$ , atinge a bola pequena, de massa  $m$ , que está em repouso.

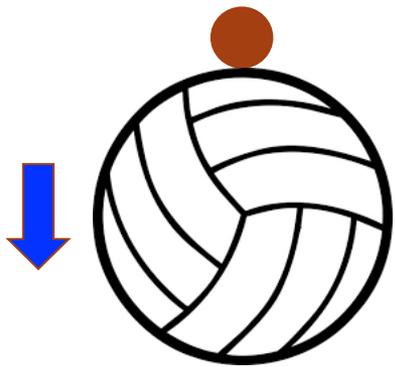


Após a colisão, o momento linear da bola pequena será

- A)  $Mv$       B)  $2Mv$       C)  $mv$       D)  $2mv$

Dica: mude para outro referencial, resolva o problema lá, depois retorne para o referencial inicial

# Teste conceitual: referenciais



Uma pequena bola de borracha é colocada sobre uma bola de vôlei, e ambas são largadas de uma certa altura, caindo juntas.

Logo antes da bola de vôlei atingir o chão, a velocidade vertical de ambas é  $v$ .

Após o choque, qual será a velocidade com que a bola pequena quica para cima, com respeito ao chão?

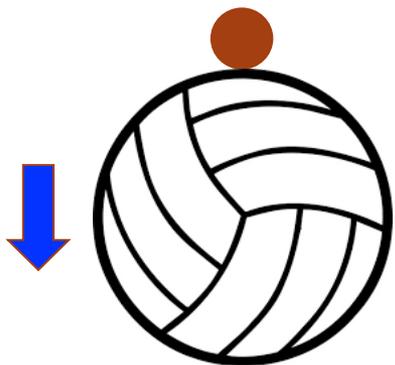
A)  $v$

B)  $2v$

C)  $3v$

D)  $4v$

# Teste conceitual: referenciais



Uma pequena bola de borracha é colocada sobre uma bola de vôlei, e ambas são largadas de uma certa altura, caindo juntas.

Logo antes da bola de vôlei atingir o chão, a velocidade vertical de ambas é  $v$ .

Após o choque, qual será a velocidade com que a bola pequena quica para cima, com respeito ao chão?

A)  $v$

B)  $2v$

C)  $3v$

D)  $4v$

# Relatividade de Galileu, versão Newton



1a Lei: existem *referenciais inerciais*, nos quais um corpo que não sofre forças se move com vel. constante

2a Lei: Em relação a um ref. inercial, vale que

$$\vec{F}_{result} = m\vec{a}$$

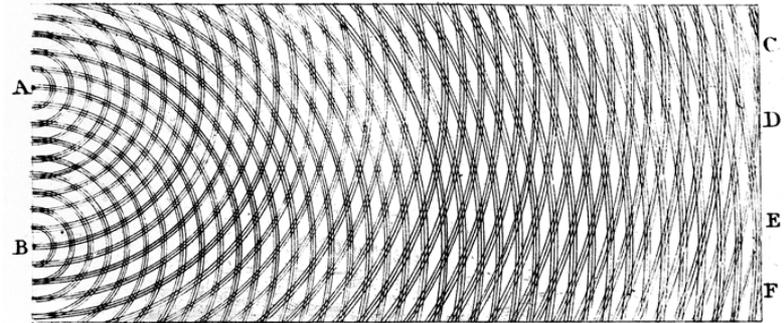
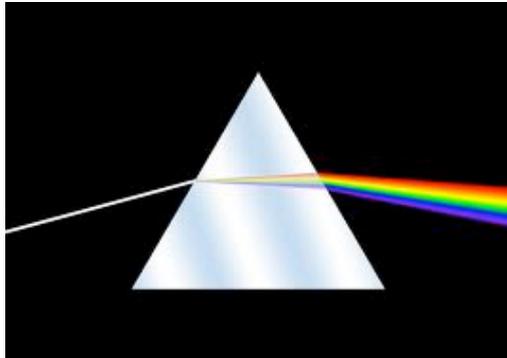
O Princípio da Relatividade de Galileu, versão de Newton:

***“As leis da mecânica são iguais em relação a qualquer referencial inercial”***

# E a luz?

Newton: acreditava que a luz era feita de *partículas*.

No início do séc XIX: descobre-se que a luz é uma *onda*, pois sofre refração, difração, interferência etc.

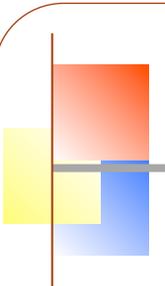


Meados do séc XIX: eqs de Maxwell descrevem todos os fenômenos elétricos, magnéticos e ópticos (unificação).

Prevêem que a luz é de fato uma onda que se desloca com velocidade

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s} = 300 \text{ m}/\mu\text{s}$$

**A pergunta porém é: com relação a que?**



# O Drama da Física Clássica

---

**Problema com a versão ondulatória: uma onda precisaria de um meio para se propagar. Surge a hipótese do ÉTER...**

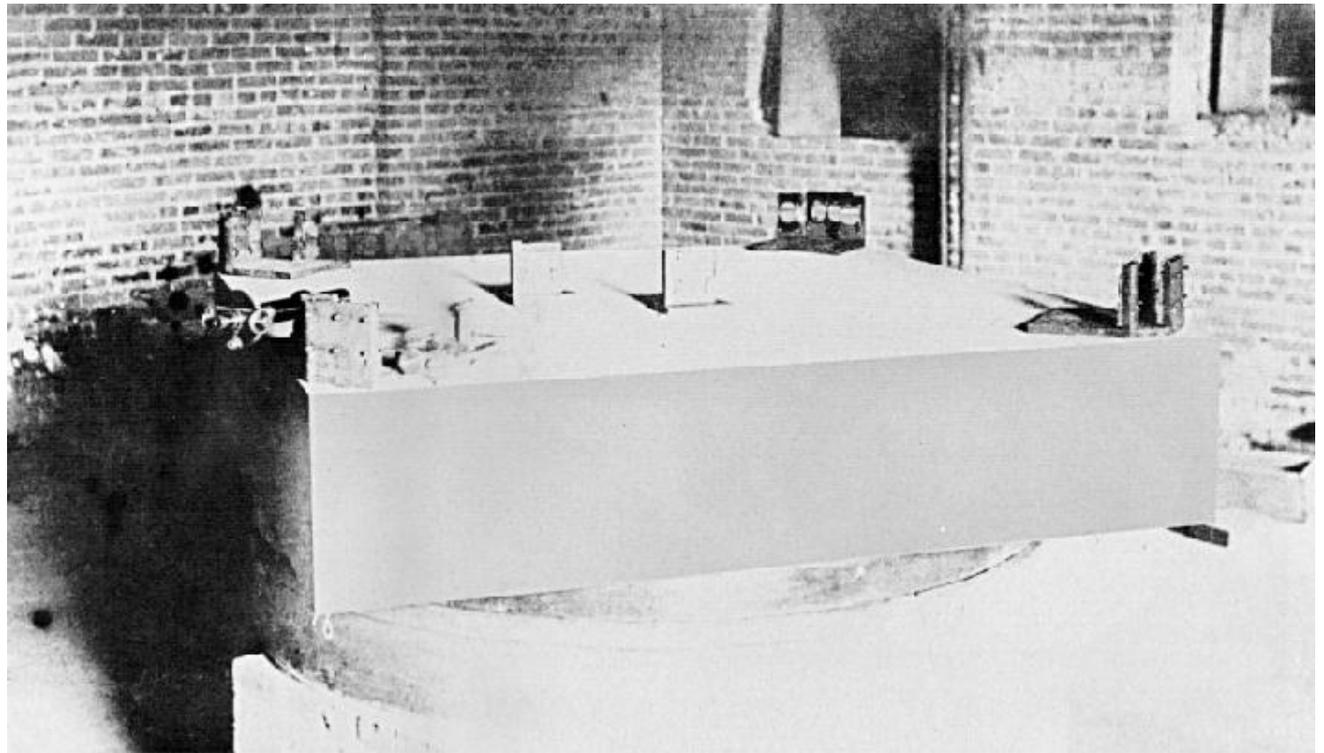
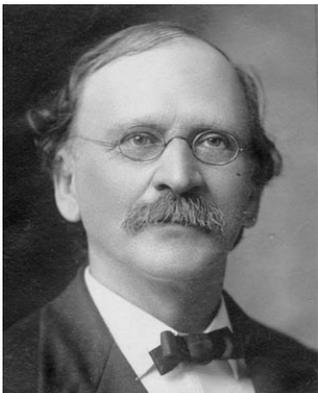
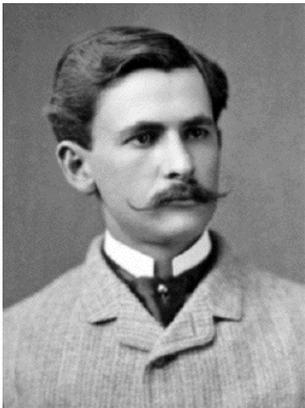
**Propriedades estranhas:**

- **rígido (para que a luz tenha a velocidade altíssima que tem)**
- **mas passa por dentro de materiais transparentes !**

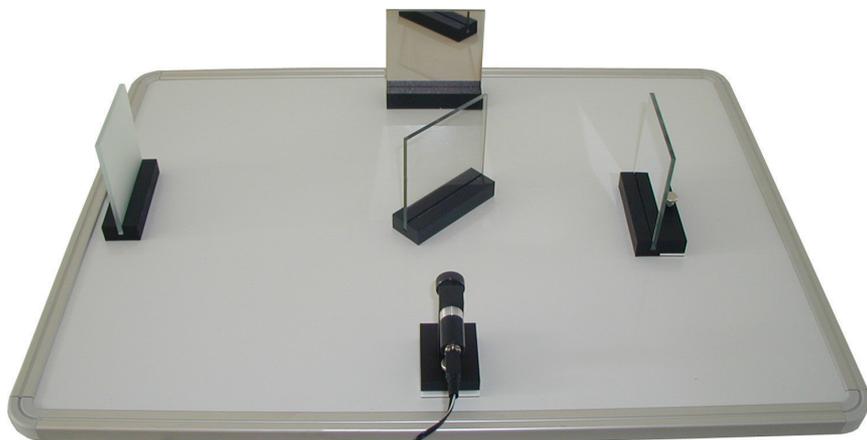
**Ideia para testar a hipótese do éter: Caso ele existisse, o movimento da Terra em relação a ele provocaria um "vento", o que mudaria a velocidade da luz na direção do movimento da Terra, com respeito àquela na direção transversal.**

# Experimento de Michelson e Morley (1887)

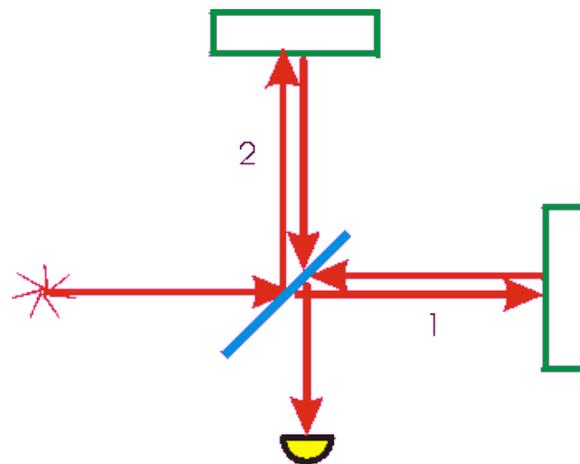
Teste experimental feito usando um *interferômetro*:



## Versão moderna do interferômetro de M & M.

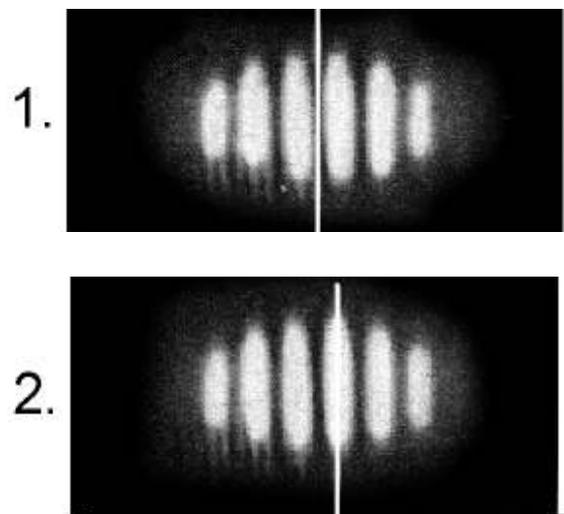


## Esquema simplificado



**Interferência construtiva ou destrutiva dos dois feixes leva a aparecerem zonas claras e escuras ('franjas') no detector**

**Caso existisse um éter, as franjas de interferência mudariam de posição ao longo do ano.**



**Resultado experimental: nenhuma alteração**

# Einstein entra em cena (1905)

**“Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento”**

**Annalen der Physik. 1905 v. 17**



**Publicado junto a dois outros artigos, um sobre o Movimento Browniano e outro sobre o Efeito Fotoelétrico (por este último Einstein ganhou o Nobel)**

891

### *3. Zur Elektrodynamik bewegter Körper; von A. Einstein.*

Daß die Elektrodynamik Maxwells — wie dieselbe gegenwärtig aufgefaßt zu werden pflegt — in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhaften scheinen, ist bekannt. Man denke z. B. an die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen einem Magneten und einem Leiter. Das beobachtbare Phänomen hängt hier nur ab von der Relativbewegung von Leiter und Magnet, während nach der üblichen Auffassung die beiden Fälle, daß der eine oder der andere dieser Körper der bewegte sei, streng voneinander zu trennen sind. Bewegt sich nämlich der Magnet und ruht der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten ein elektrisches Feld von gewissem Energiewerte, welches an den Orten, wo sich Teile des Leiters befinden, einen Strom erzeugt. Ruht aber der Magnet und bewegt sich der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten kein elektrisches Feld, dagegen im Leiter eine elektromotorische Kraft, welcher an sich keine Energie entspricht, die aber — Gleichheit der Relativbewegung bei den beiden ins Auge gefaßten Fällen vorausgesetzt — zu elektrischen Strömen von derselben Größe und demselben Verlaufe Veranlassung gibt, wie im ersten Falle die elektrischen Kräfte.

Beispiele ähnlicher Art, sowie die mißlungenen Versuche, eine Bewegung der Erde relativ zum „Lichtmedium“ zu konstatieren, führen zu der Vermutung, daß dem Begriffe der absoluten Ruhe nicht nur in der Mechanik, sondern auch in der Elektrodynamik keine Eigenschaften der Erscheinungen entsprechen, sondern daß vielmehr für alle Koordinatensysteme, für welche die mechanischen Gleichungen gelten, auch die gleichen elektrodynamischen und optischen Gesetze gelten, wie dies für die Größen erster Ordnung bereits erwiesen ist. Wir wollen diese Vermutung (deren Inhalt im folgenden „Prinzip der Relativität“ genannt werden wird) zur Voraussetzung erheben und außerdem die mit ihm nur scheinbar unverträgliche

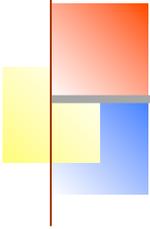
# A Relatividade de Einstein

Solução proposta por Einstein (simples à primeira vista):  
estender o princípio de Galileu para *todos* os fenômenos  
físicos, ie, não apenas os mecânicos mas também os  
eletromagnéticos



O Princípio da Relatividade de Einstein:

***“Todas as leis da Física são iguais em  
relação a qualquer referencial inercial”***



# A constância da velocidade da Luz

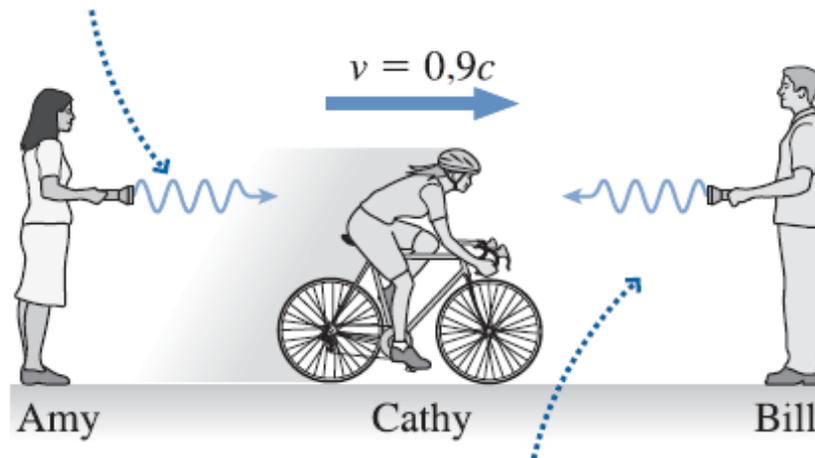
---

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3,0 \times 10^8 m/s = 300m/\mu s$$

1. Pelo Princípio da Relatividade, as equações de Maxwell valem em todos os referenciais inerciais.
2. As equações de Maxwell prevêm que as ondas eletromagnéticas, inclusive a luz, se propagam com velocidade **c**
3. **Portanto, a luz se propaga com velocidade c em relação a todos os referenciais inerciais!!**

# A constância da velocidade da Luz

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s} = 300 \text{ m}/\mu\text{s}$$

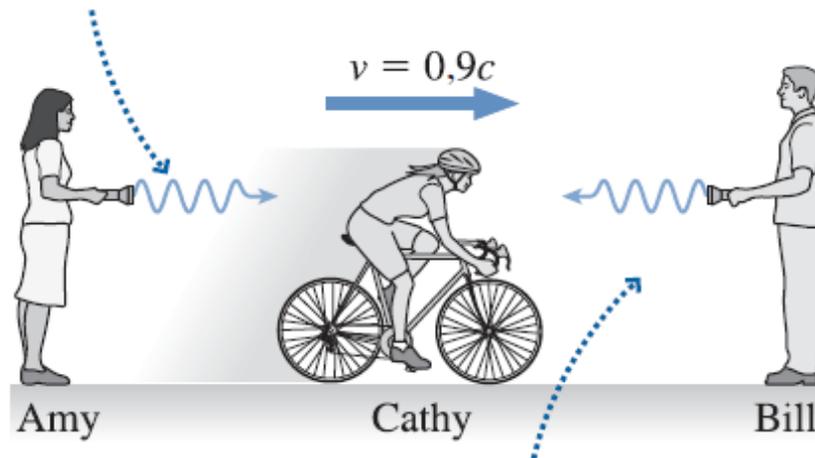


**No referencial de Cathy, os feixes de luz provenientes de Amy e Bill se aproximam de Cathy, respectivamente com velocidades**

- A)  $0,1c$  e  $1,9c$
- B)  $c$  e  $c$
- C)  $1,9c$  e  $0,1c$

# A constância da velocidade da Luz

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s} = 300 \text{ m}/\mu\text{s}$$



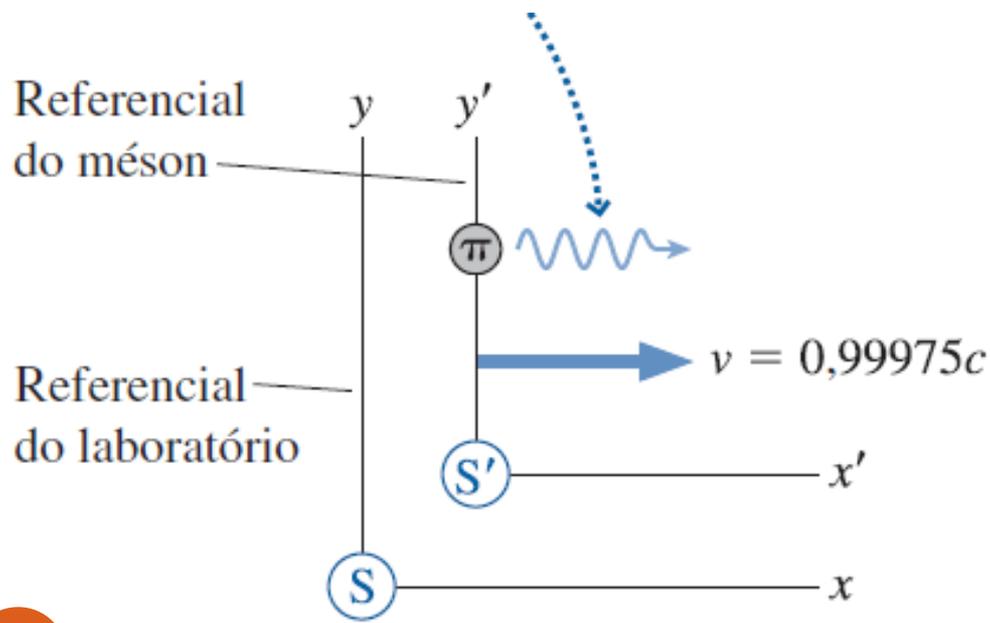
No referencial de Cathy, os feixes de luz provenientes de Amy e Bill se aproximam de Cathy, respectivamente com velocidades

- A)  $0,1c$  e  $1,9c$
- B)  $c$  e  $c$
- C)  $1,9c$  e  $0,1c$

# Evidência experimental

Um tipo de partícula chamada méson  $\pi$  pode ser gerado em um acelerador de partículas viajando a velocidades altíssimas, p/ ex.  $v = 0.99975c$ .

Essas partículas decaem naturalmente, emitindo um fóton de alta energia. No referencial do méson, o fóton viaja com velocidade  $c$ .



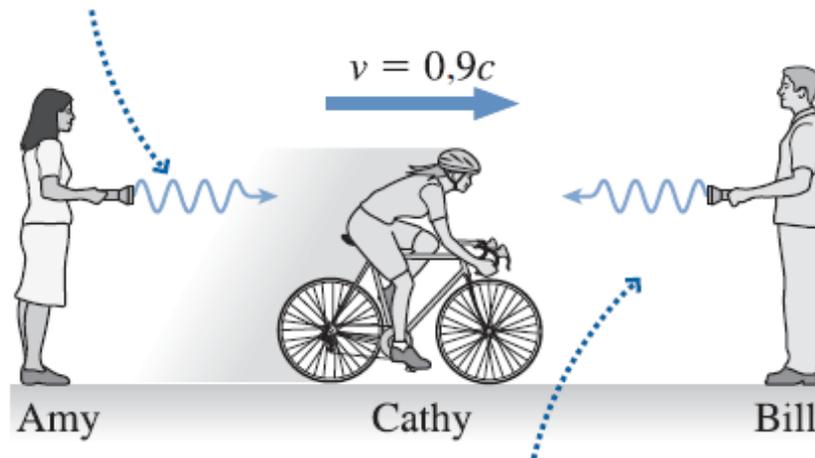
Pelo senso comum, deveríamos medir a velocidade do fóton no ref. do laboratório como  $u = 1,99975 c$ .

Mas as medidas mostram que ela continua igual a

$$u = 3 \times 10^8 \text{ m/s} = c \quad !!$$

# A constância da velocidade da Luz

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s} = 300 \text{ m}/\mu\text{s}$$

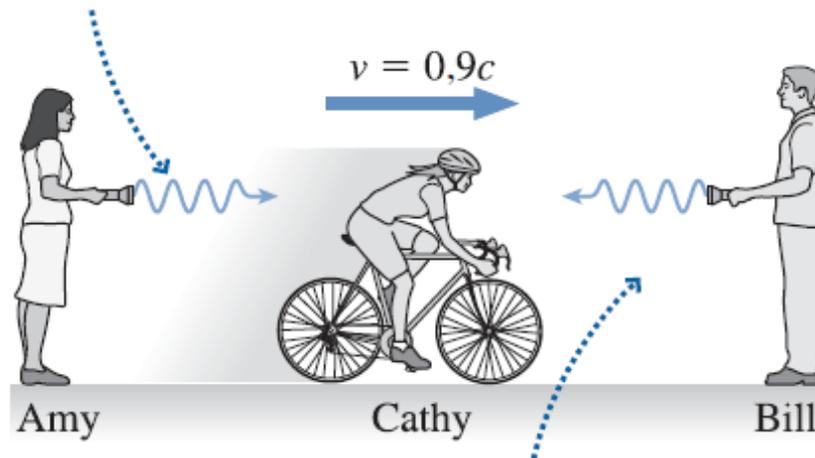


**No referencial de Amy e Bill, os feixes de luz provenientes de Amy e Bill se aproximam de Cathy, respectivamente com velocidades**

- A)  $0,1c$  e  $1,9c$
- B)  $c$  e  $c$
- C)  $1,9c$  e  $0,1c$

# A constância da velocidade da Luz

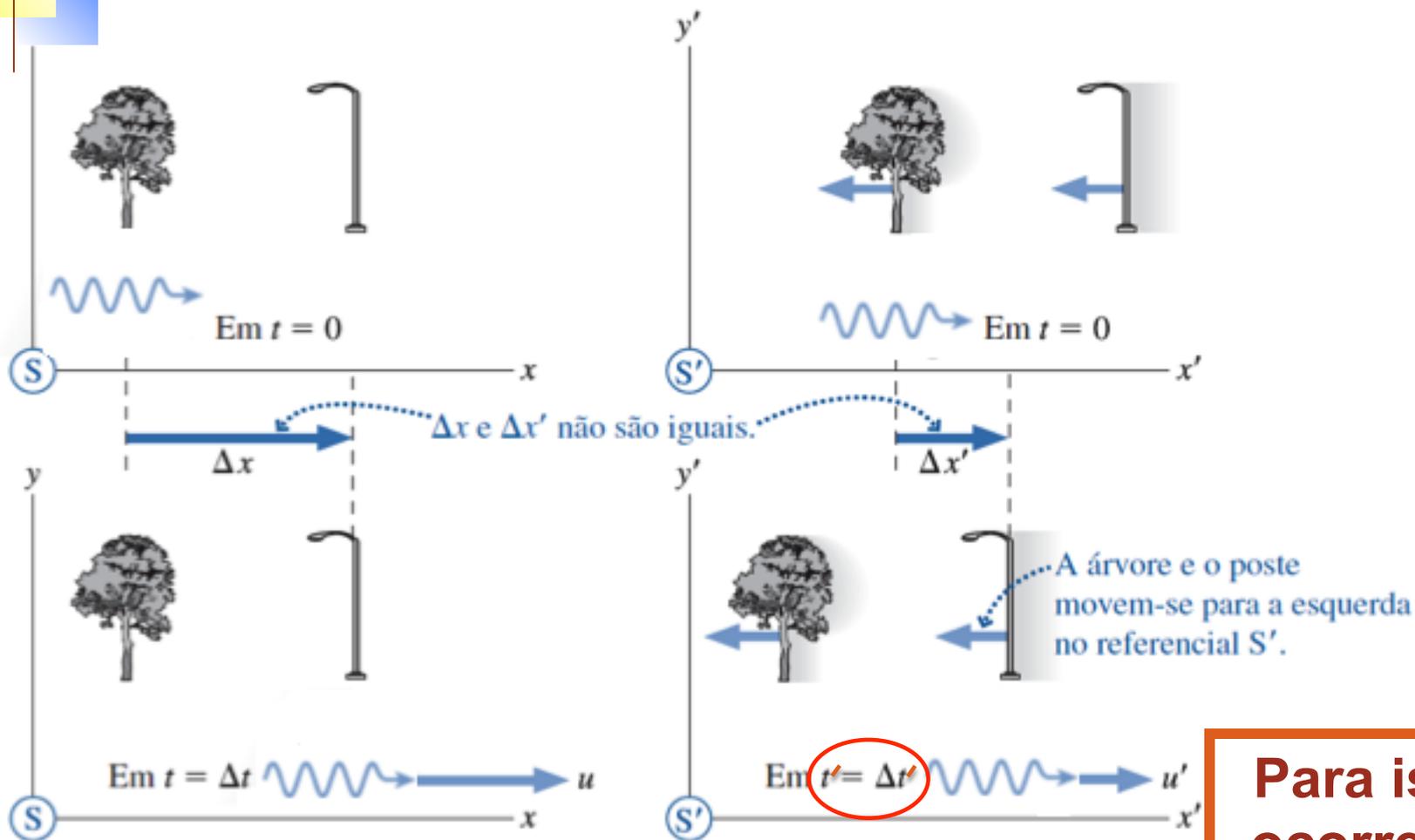
$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s} = 300 \text{ m}/\mu\text{s}$$



**No referencial de Amy e Bill, os feixes de luz provenientes de Amy e Bill se aproximam de Cathy, respectivamente com velocidades**

- A)  $0,1c$  e  $1,9c$**
- B)  $c$  e  $c$**
- C)  $1,9c$  e  $0,1c$**

# Como isto é possível?



Por Galileu:

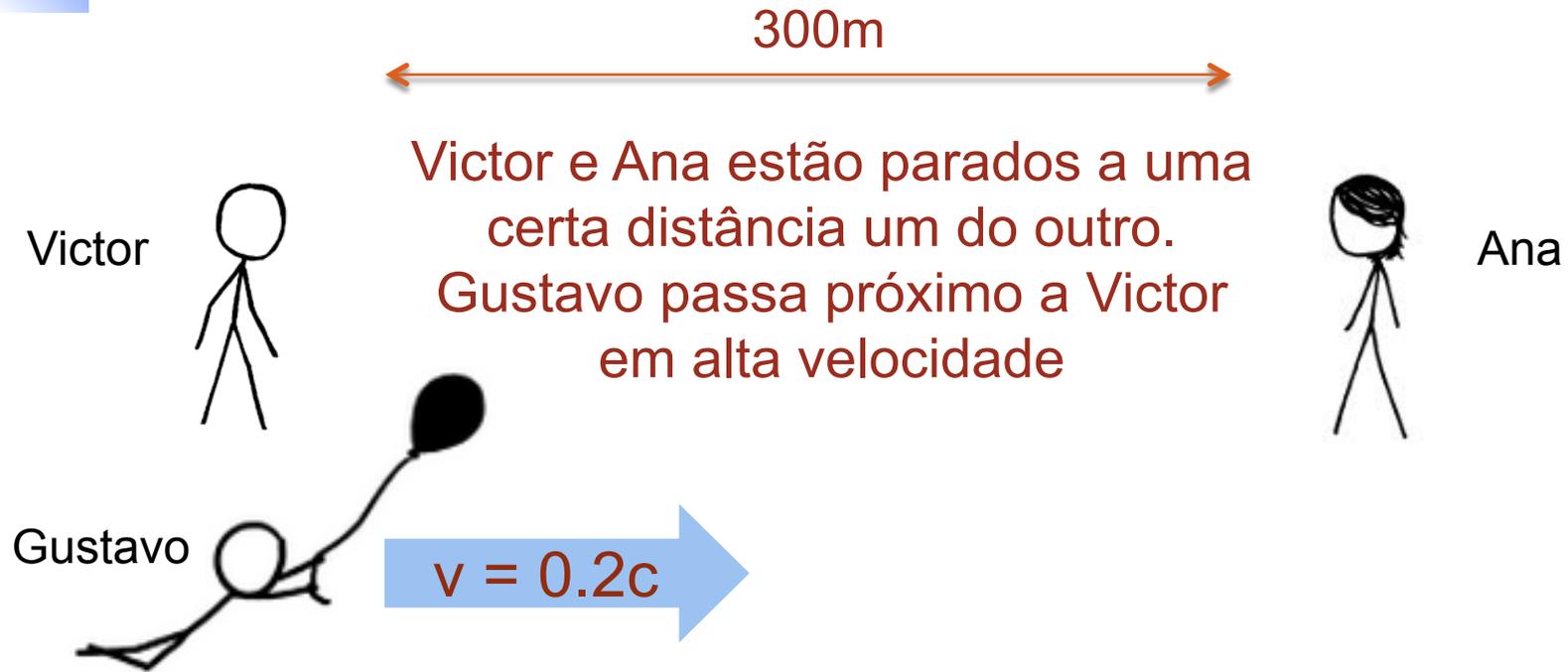
$$u' = \Delta x' / \Delta t \neq u = \Delta x / \Delta t$$

Mas se ao invés da bicicleta  
temos um raio de luz:

$$u' = u = c !!$$

**Para isso  
ocorrer, é  
preciso  
 $\Delta t' \neq \Delta t$  (!!?)**

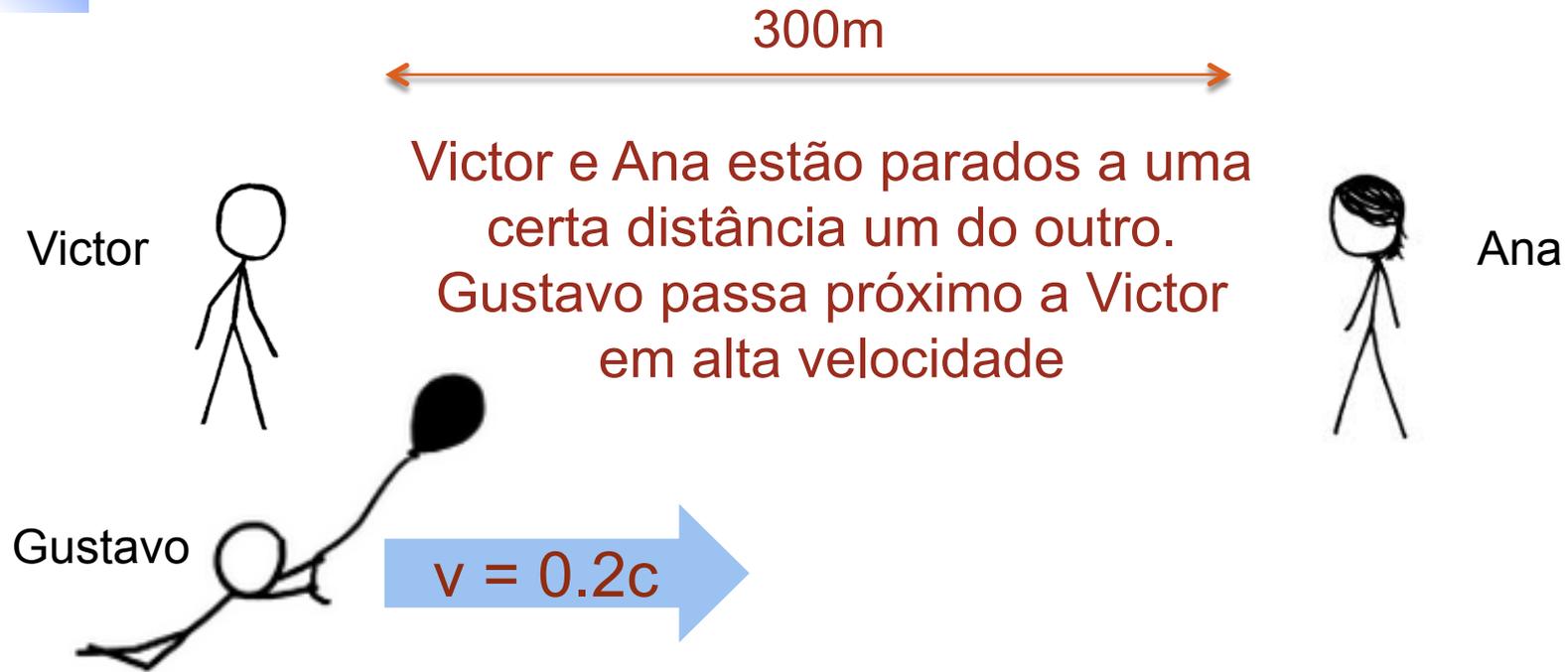
# Teste Conceitual: referenciais



Quantos referenciais diferentes são representados por Victor, Ana e Gustavo?

- A) Um
- B) Dois: (Victor – Ana , e Gustavo)
- C) Dois: (Victor – Gustavo, e Ana )
- D) Três

# Teste Conceitual: referenciais

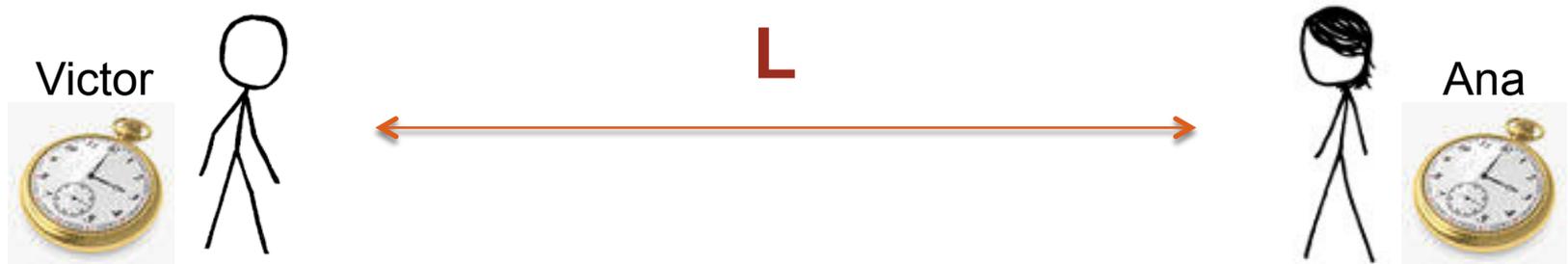


Quantos referenciais diferentes são representados por Victor, Ana e Gustavo?

- A) Um
- B) Dois: (Victor – Ana , e Gustavo)
- C) Dois: (Victor – Gustavo, e Ana )
- D) Três

# Teste conceitual: Sincronização

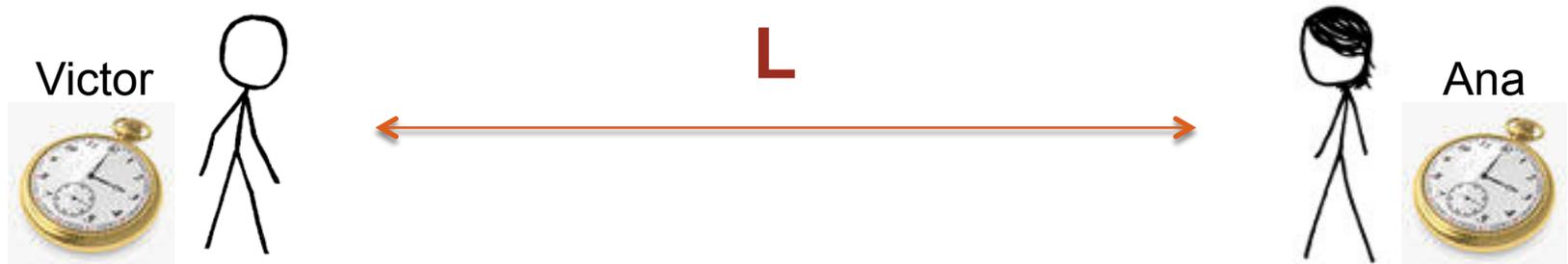
Victor e Ana estão parados a uma certa distância **desconhecida**  $L$  um do outro. Cada um tem um relógio. Eles desejam *sincronizar* seus relógios, sem saírem do lugar. É possível fazer isso?



- A) Sim, e não é necessário determinar  $L$
- B) Sim, mas primeiro eles precisam determinar  $L$
- C) Não, eles precisariam saber de antemão o valor de  $L$
- D) Não, eles precisariam se encontrar para sincronizar os relógios

# Teste conceitual: Sincronização

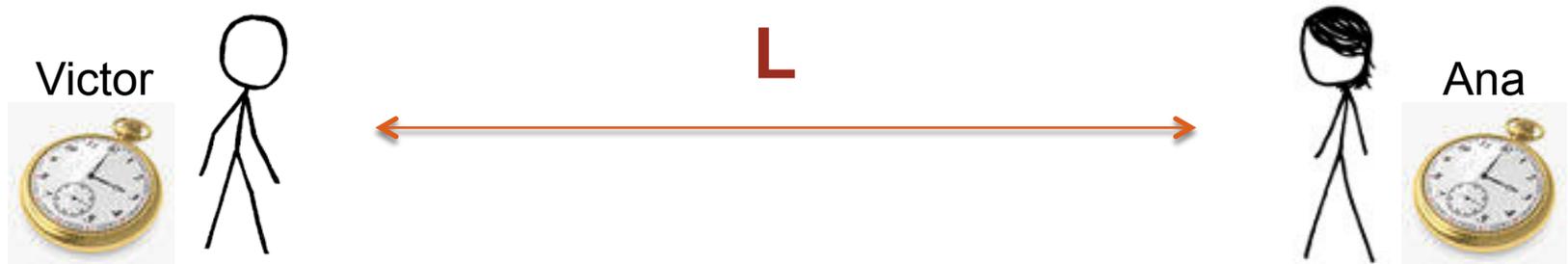
Victor e Ana estão parados a uma certa distância **desconhecida**  $L$  um do outro. Cada um tem um relógio. Eles desejam *sincronizar* seus relógios, sem saírem do lugar. É possível fazer isso?



- A) Sim, e não é necessário determinar  $L$
- B) Sim, mas primeiro eles precisam determinar  $L$
- C) Não, eles precisariam saber de antemão o valor de  $L$
- D) Não, eles precisariam se encontrar para sincronizar os relógios

# Teste conceitual: Sincronização

Victor e Ana estão parados a uma certa distância **desconhecida**  $L$  um do outro. Cada um tem um relógio. Eles desejam *sincronizar* seus relógios, sem saírem do lugar. É possível fazer isso?



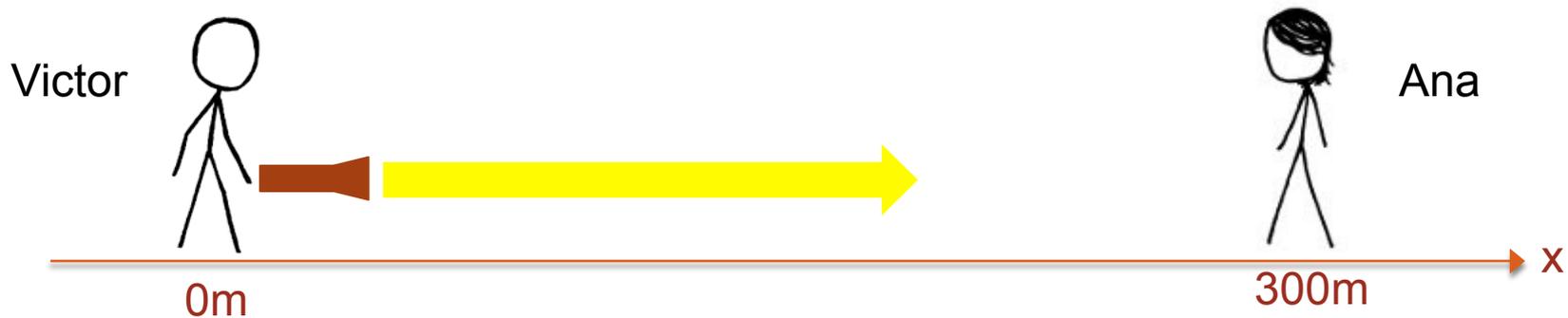
Para determinar  $L$ : Victor envia luz até Ana, observa o tempo  $t$  para o reflexo retornar. Determina  $L = c t / 2$

Suponha p.ex.  $L = 300\text{m}$ . **Para sincronizar relógios:** Victor envia um sinal luminoso com a hora certa (digamos, 13h). Assim que Ana recebe o sinal, ela acerta o seu relógio p/ 13h *mais*  $10^{-6}\text{s}$

# Teste conceitual: Eventos

**Evento**: uma ocorrência física em um ponto específico no espaço e no tempo. Este ponto pode ser descrito em um dado referencial por coordenadas  $(x,y,z,t)$ .

Ex: Evento 1: Victor acende uma lanterna



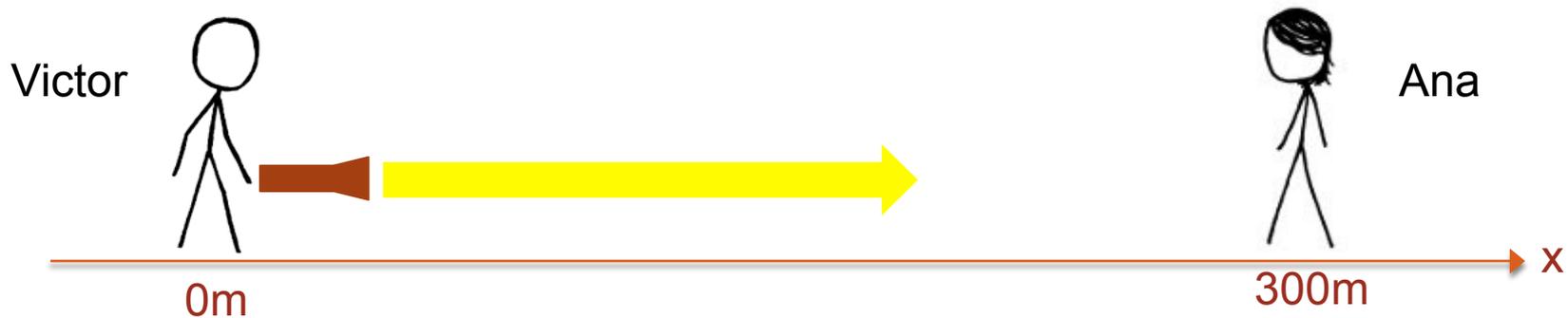
Se as coordenadas do Evento 1 são  $(x=0\text{m}, t=0\text{s})$ , no referencial de Victor, quais as coordenadas  $(x,t)$  ***deste mesmo evento*** no referencial de Ana?

- A)  $0\text{m}, 0\text{s}$     B)  $-300\text{m}, 0\text{s}$     C)  $300\text{m}, 10^{-6}\text{s}$     D)  $0\text{m}, 10^{-6}\text{s}$

# Teste conceitual: Eventos

**Evento**: uma ocorrência física em um ponto específico no espaço e no tempo. Este ponto pode ser descrito em um dado referencial por coordenadas  $(x,y,z,t)$ .

Ex: Evento 1: Victor acende uma lanterna



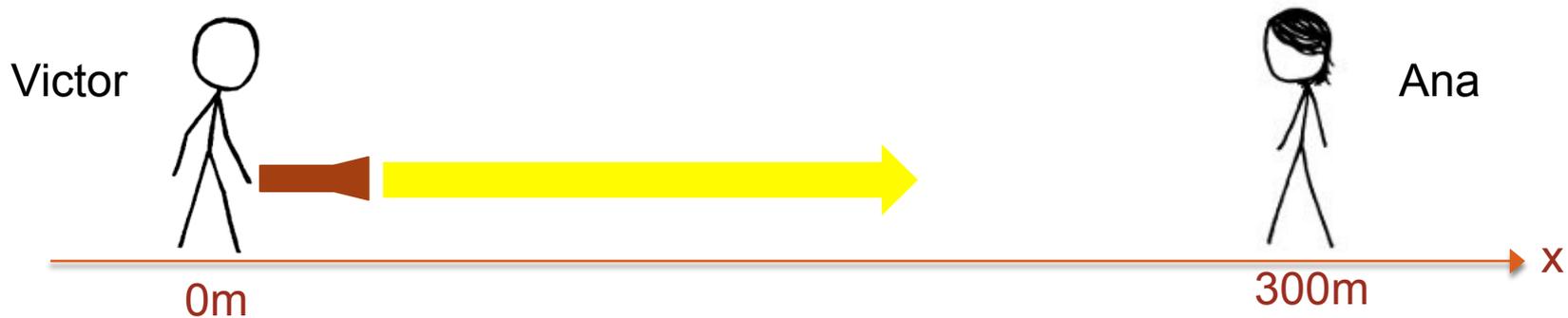
Se as coordenadas do Evento 1 são  $(x=0\text{m}, t=0\text{s})$ , no referencial de Victor, quais as coordenadas  $(x,t)$  ***deste mesmo evento*** no referencial de Ana?

- A) 0m, 0s**      **B) -300m, 0s**      **C) 300m,  $10^{-6}\text{s}$**       **D) 0m,  $10^{-6}\text{s}$**

# Eventos

**Evento**: uma ocorrência física em um ponto específico no espaço e no tempo. Este ponto pode ser descrito em um dado referencial por coordenadas  $(x,y,z,t)$ .

Ex: Evento 1: Victor acende uma lanterna:



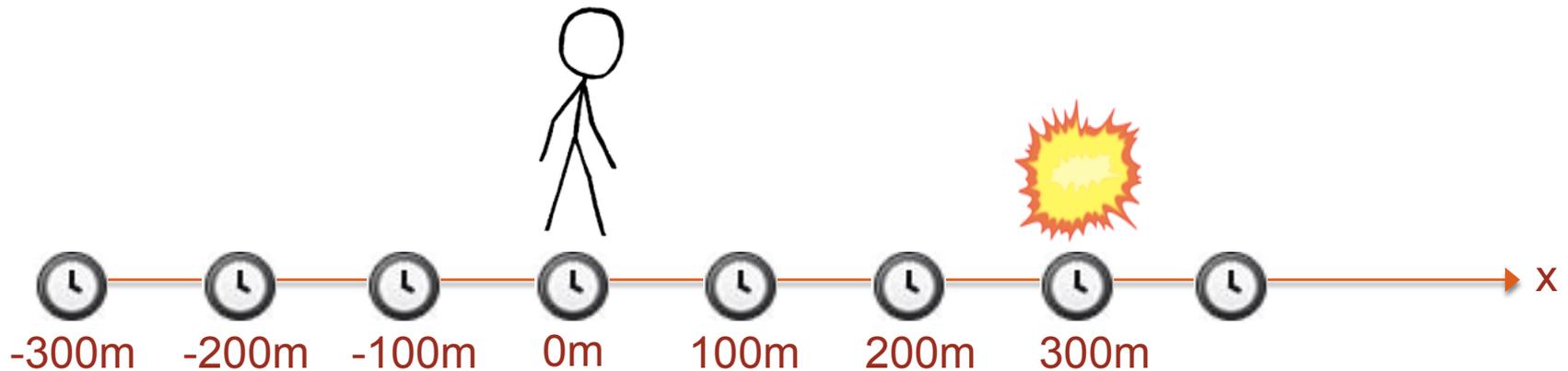
**Conclusão**: a posição e instante em que um evento *realmente ocorre*, de acordo com um determinado observador **não são** em geral iguais à posição e instante em que este observador *percebe* o evento. Essa percepção é um **outro evento**.

Ex: Evento 2: Ana enxerga a luz da lanterna de Victor:

$$x = 300\text{m}, t = 10^{-6}\text{s}$$

# Referenciais

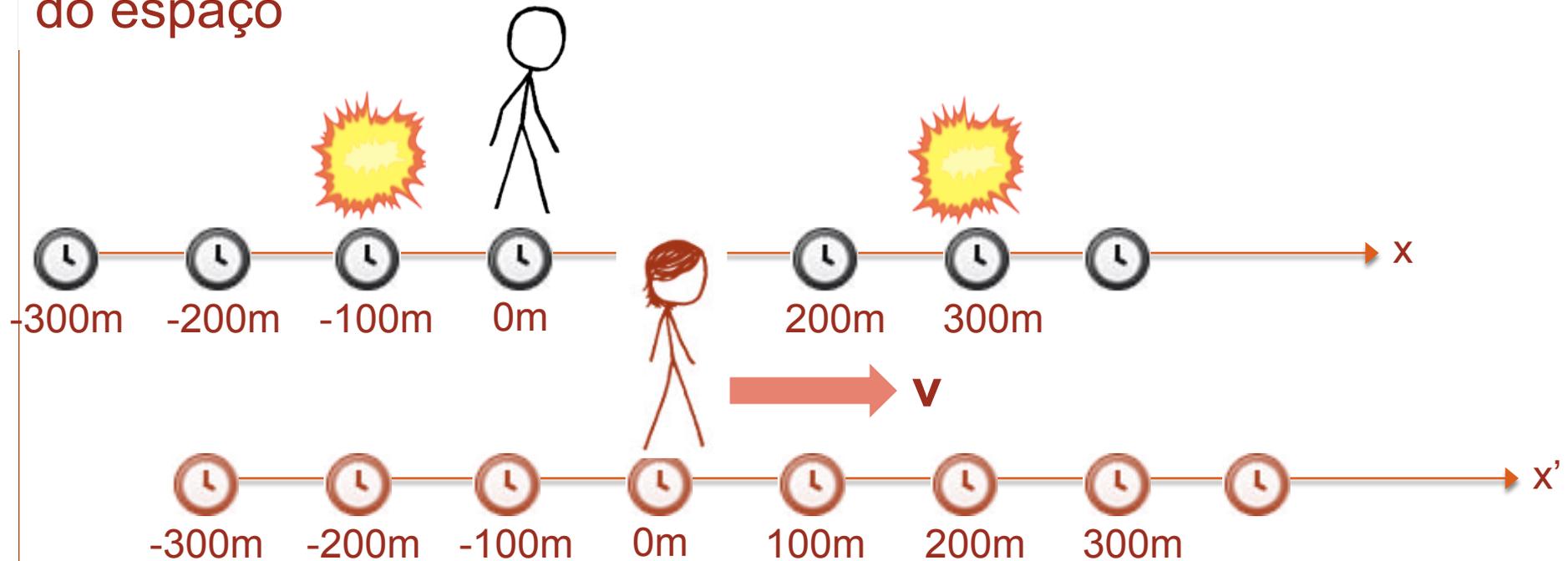
Em conclusão: quando falamos em um *referencial*, podemos imaginar uma série de relógios sincronizados espalhados ao longo do espaço, todos parados em relação uns aos outros.



Um observador pode assim determinar o instante em que qualquer evento de fato ocorreu, mesmo que demore um pouco até ele obter essa informação (devido à velocidade finita da luz).

# Simultaneidade

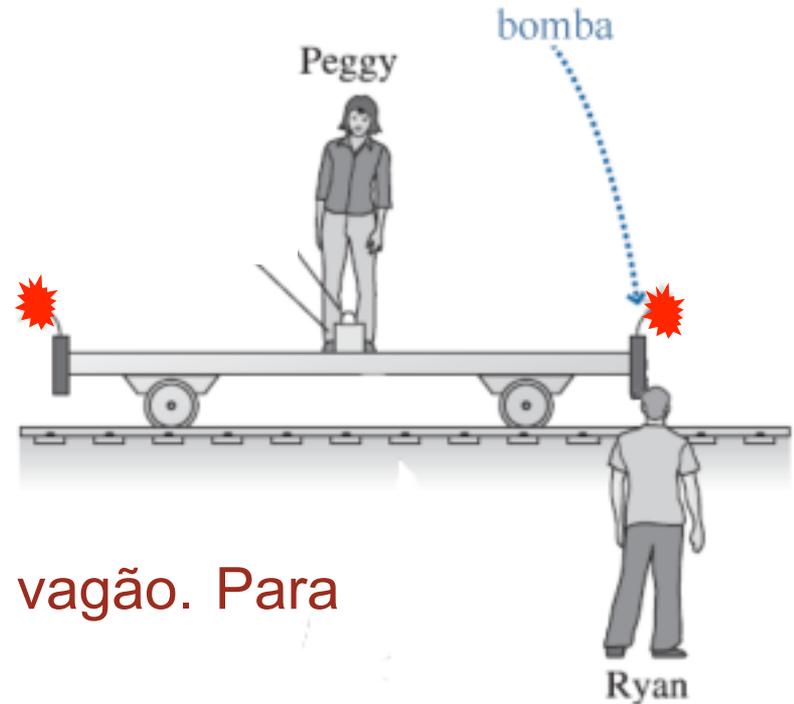
Dois eventos são **simultâneos** com respeito a um referencial se ocorrem no mesmo instante, mesmo que em pontos diferentes do espaço



A questão é: como esses eventos são descritos num **segundo** referencial, se movendo com velocidade  $v$  com respeito ao  $1o$ ?

# Teste conceitual: simultaneidade 1

- Peggy está no centro de um vagão parado. Ela enxerga duas bombas explodindo simultaneamente em cada ponta do vagão

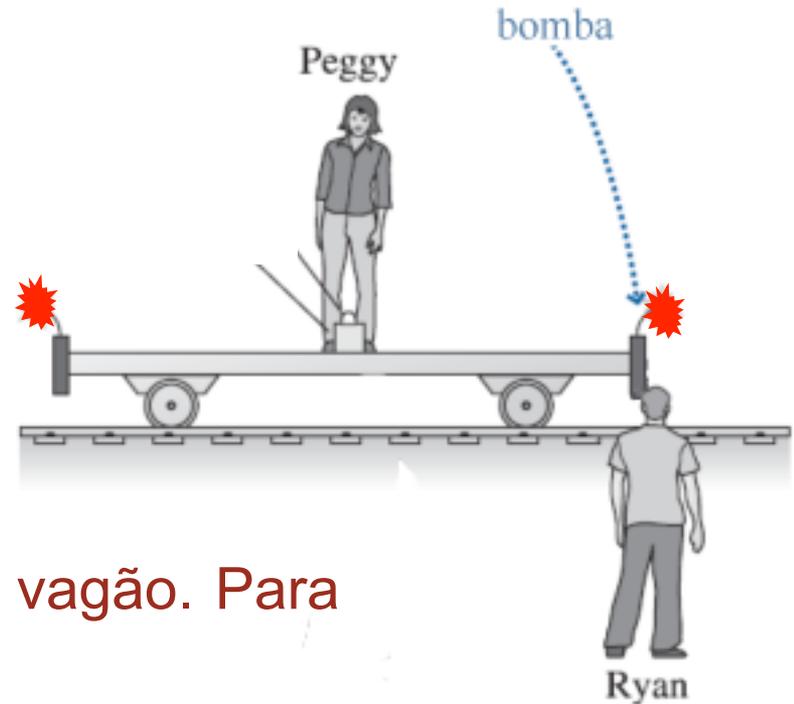


- Ryan está junto a uma das pontas do vagão. Para ele, o que realmente ocorre é que

- A) A bomba da esquerda explode primeiro
- B) A bomba da direita explode primeiro
- C) As duas bombas explodem simultaneamente

# Teste conceitual: simultaneidade 1

- Peggy está no centro de um vagão parado. Ela enxerga duas bombas explodindo simultaneamente em cada ponta do vagão

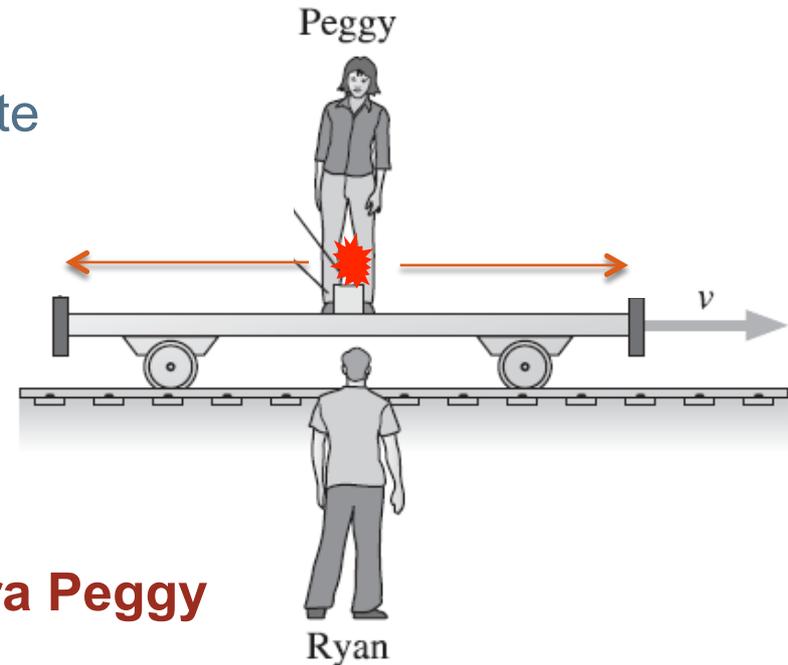


- Ryan está junto a uma das pontas do vagão. Para ele, o que realmente ocorre é que

- A) A bomba da esquerda explode primeiro**
- B) A bomba da direita explode primeiro**
- C) As duas bombas explodem simultaneamente**

## Teste conceitual: simultaneidade 2

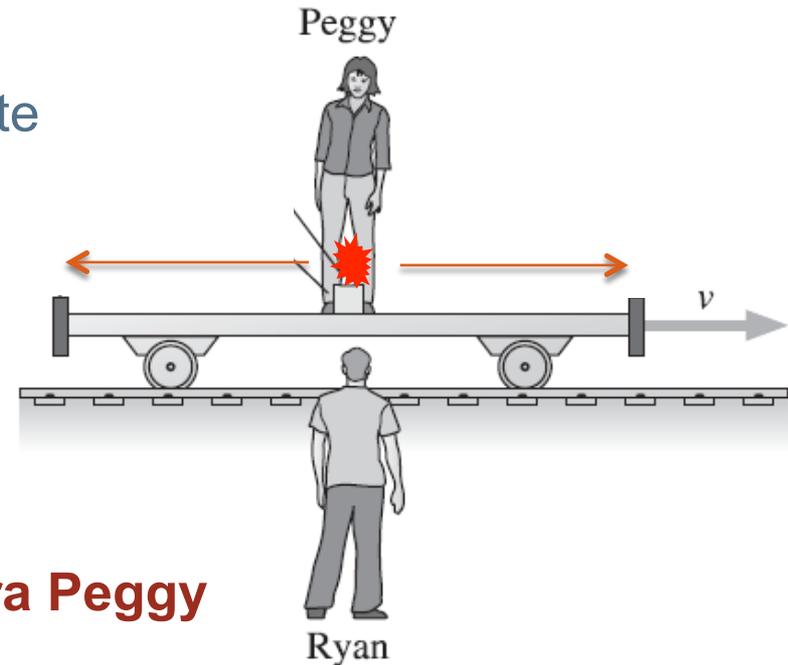
- Agora o vagão está em movimento com velocidade  $v$  em relação ao chão
- Peggy solta uma bombinha bem à sua frente
- A luz da explosão se propaga até atingir as pontas do vagão. Chamemos de Evento 1 (E1) a chegada da luz na ponta esquerda, e Evento 2 (E2) a chegada da luz na ponta direita.



- A) E1 ocorre antes de E2 para Ryan e para Peggy**
- B) E1 e E2 ocorrem simultaneamente para Peggy, mas para Ryan E1 ocorre antes de E2**
- C) E1 e E2 ocorrem simultaneamente para Ryan e para Peggy, e Ryan também enxerga esses eventos simultaneamente**
- D) E1 e E2 ocorrem simultaneamente tanto para Ryan como para Peggy, mas Ryan enxerga E1 ocorrendo antes de E2**

## Teste conceitual: simultaneidade 2

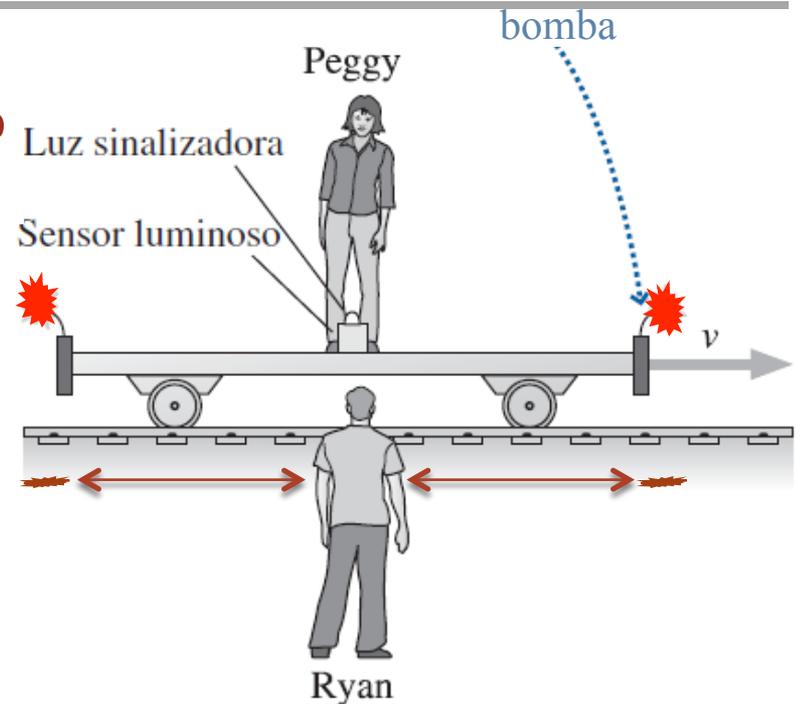
- Agora o vagão está em movimento com velocidade  $v$  em relação ao chão
- Peggy solta uma bombinha bem à sua frente
- A luz da explosão se propaga até atingir as pontas do vagão. Chamemos de Evento 1 (E1) a chegada da luz na ponta esquerda, e Evento 2 (E2) a chegada da luz na ponta direita.



- A) E1 ocorre antes de E2 para Ryan e para Peggy**
- B) E1 e E2 ocorrem simultaneamente para Peggy, mas para Ryan E1 ocorre antes de E2**
- C) E1 e E2 ocorrem simultaneamente para Ryan e para Peggy, e Ryan também enxerga esses eventos simultaneamente**
- D) E1 e E2 ocorrem simultaneamente tanto para Ryan como para Peggy, mas Ryan enxerga E1 ocorrendo antes de E2**

# Teste conceitual: simultaneidade 3

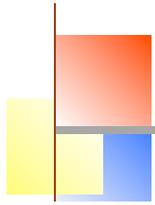
- Novamente, o vagão está em movimento com velocidade  $v$ .
- Bombas explodem em cada ponta
- Dessa vez, Ryan vê simultaneamente a luz das duas explosões. Ele também observa que as marcas deixadas no solo pelas explosões estão à mesma distância dele.



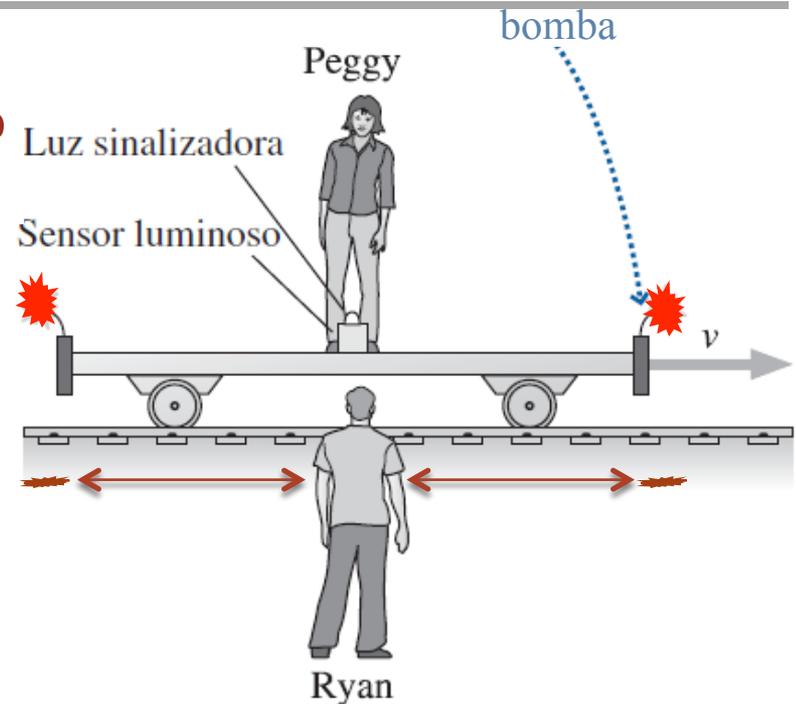
Peggy possui um sensor ligado a uma luz sinalizadora

1. Se o sensor detecta o flash vindo da direita antes do vindo da esquerda: **LUZ VERDE**
2. Se o sensor detecta o flash vindo da esquerda antes do vindo da direita ou se chegarem simultaneamente: **LUZ VERMELHA**

# Teste conceitual: simultaneidade 3



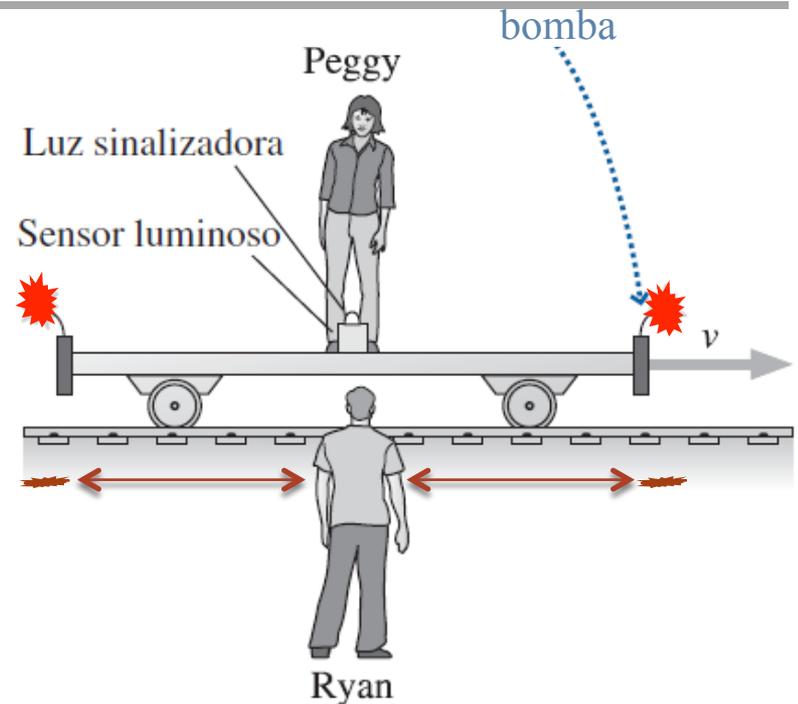
- Novamente, o vagão está em movimento com velocidade  $v$ .
- Bombas explodem em cada ponta
- Dessa vez, Ryan vê simultaneamente a luz das duas explosões. Ele também observa que as marcas deixadas no solo pelas explosões estão à mesma distância dele.



- Como Peggy descreve a ordem das explosões?
- Qual luz acende?

# Teste conceitual: simultaneidade 3

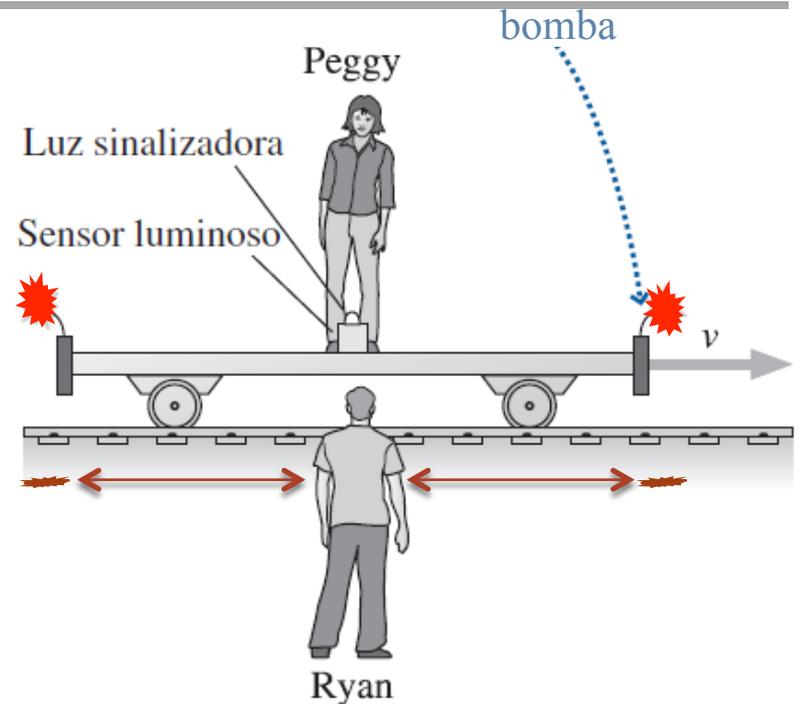
- Novamente, o vagão está em movimento com velocidade  $v$ .
- Bombas explodem em cada ponta
- Dessa vez, Ryan vê simultaneamente a luz das duas explosões. Ele também observa que as marcas deixadas no solo pelas explosões estão à mesma distância dele. Portanto, para Peggy:



- A) A bomba direita explode primeiro, e a luz **VERDE** acende
- B) A bomba direita explode primeiro, e a luz **VERMELHA** acende
- C) As duas bombas explodem simultaneamente, e a luz **VERDE** acende
- D) As duas bombas explodem simultaneamente, e a luz **VERMELHA** acende

# Teste conceitual: simultaneidade 3

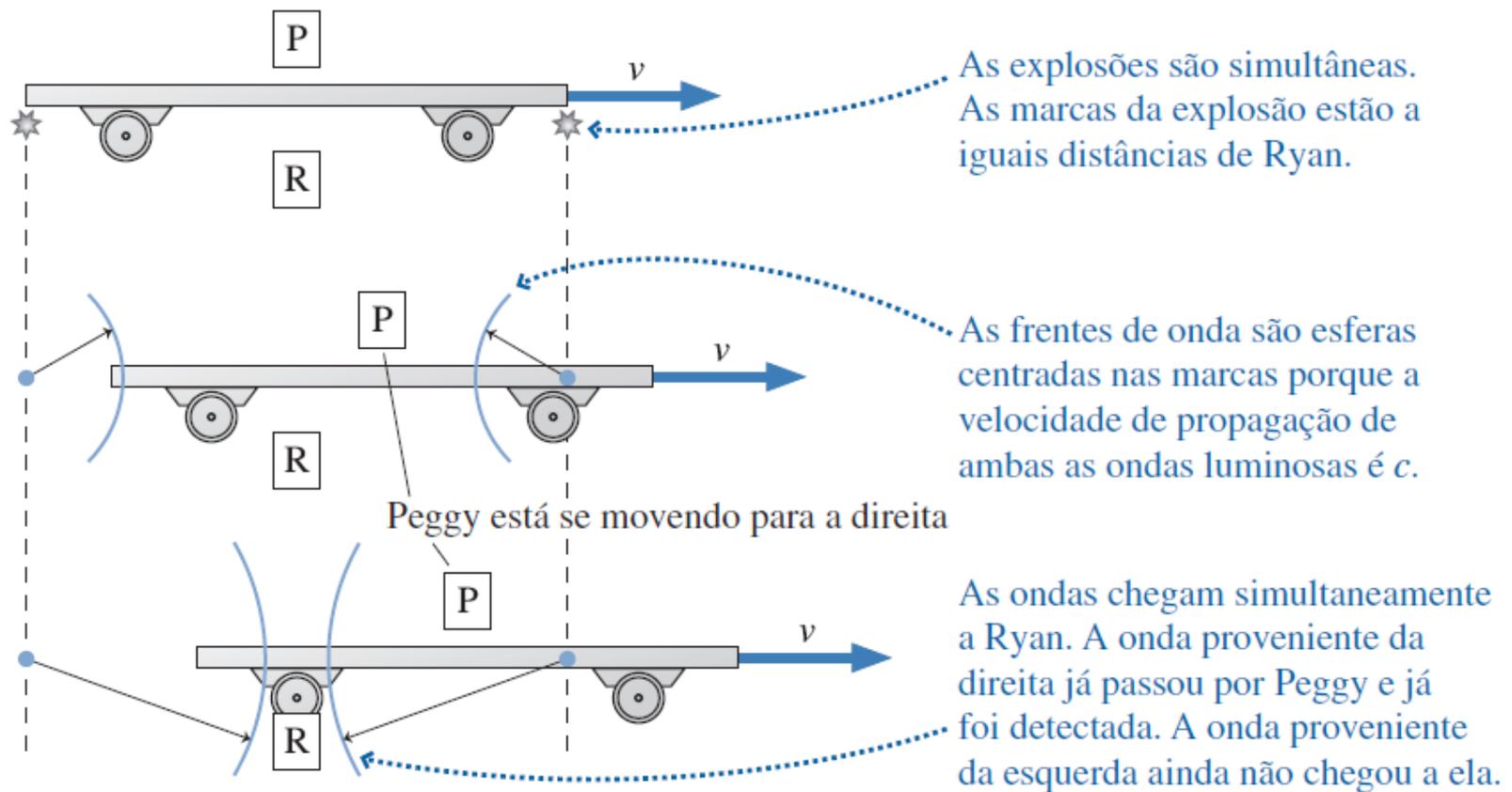
- Novamente, o vagão está em movimento com velocidade  $v$ .
- Bombas explodem em cada ponta
- Dessa vez, Ryan vê simultaneamente a luz das duas explosões. Ele também observa que as marcas deixadas no solo pelas explosões estão à mesma distância dele. Portanto, para Peggy:



- A) A bomba direita explode primeiro, e a luz **VERDE** acende
- B) A bomba direita explode primeiro, e a luz **VERMELHA** acende
- C) As duas bombas explodem simultaneamente, e a luz **VERDE** acende
- D) As duas bombas explodem simultaneamente, e a luz **VERMELHA** acende

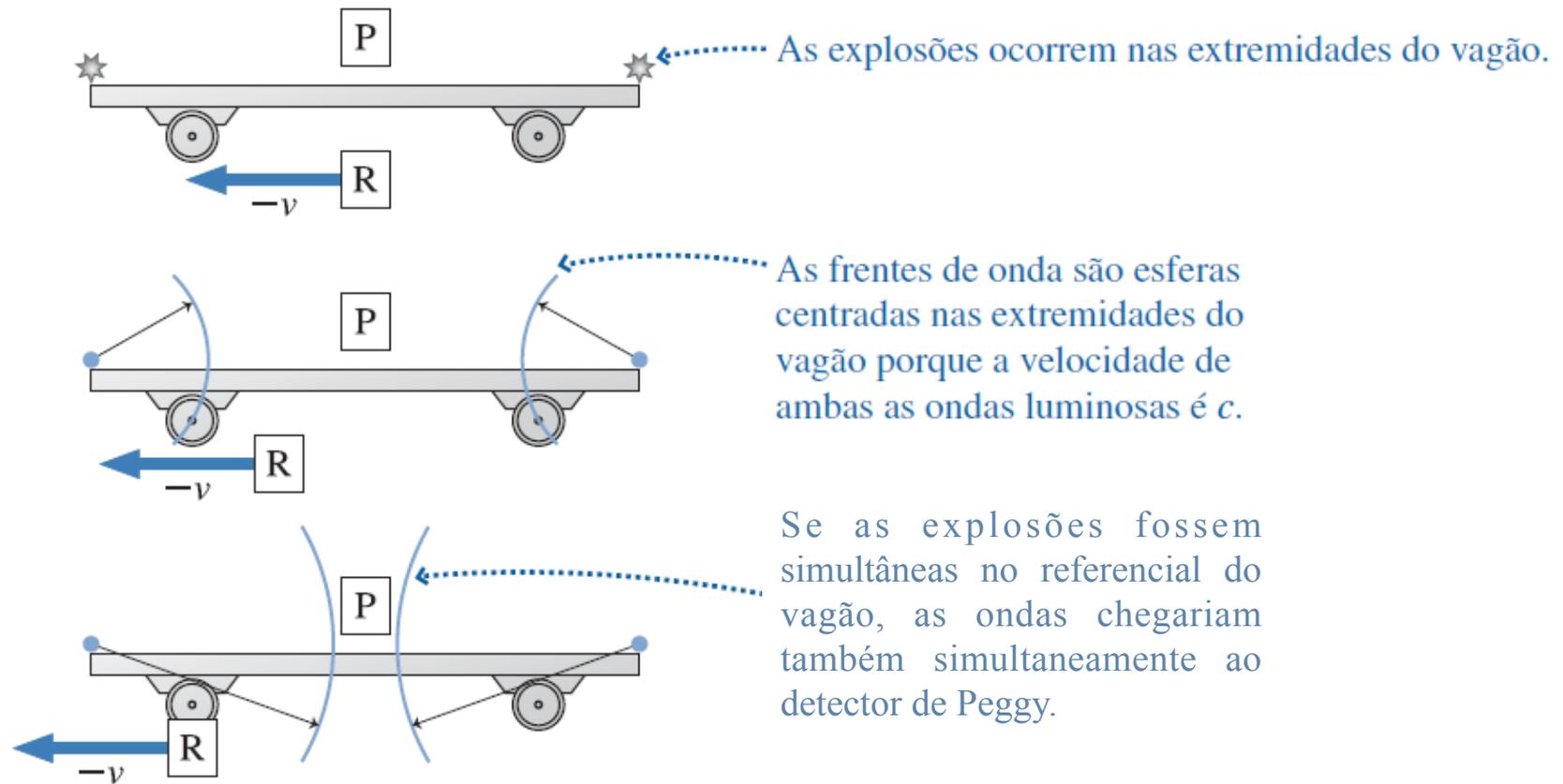
# A relatividade da simultaneidade

## Descrição no referencial parado na terra (Ryan)



# A relatividade da simultaneidade

E se as explosões fossem simultâneas para Peggy?



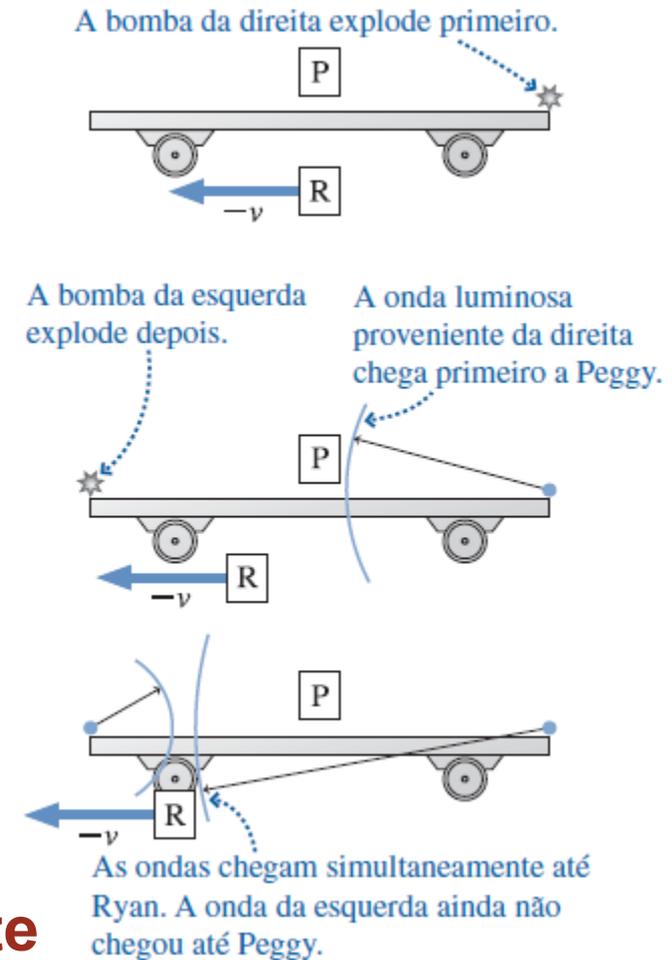
Se as explosões fossem simultâneas para Peggy, a luz **VERMELHA** acenderia. Mas não é isso que ocorre!

# A relatividade da simultaneidade

Descrição correta no referencial de Peggy: como sabemos que a Luz **VERDE** acende (e isso não pode depender do referencial)

A bomba da direita tem de ter explodido primeiro!!

Peggy e Ryan concordam sobre o que ocorreu (bombas explodiram, e a luz **VERDE** acendeu), mas cada um **explica** os acontecimentos de maneira diferente



# Discussão

Se um evento ocorre para um observador, ele também ocorre para qualquer outro observador. (p. exemplo: a luz **VERDE** acende, não a vermelha).

Fatos não são relativos!

Porém, a *descrição* dos eventos irá variar de acordo com o referencial. Observadores em movimento relativo irão atribuir valores diferentes para a posição e instante de um mesmo evento.

Em particular: Dois eventos que ocorrem simultaneamente em um referencial  $S$  **não** são em geral simultâneos em outro referencial  $S'$  em movimento relativo a  $S$ .

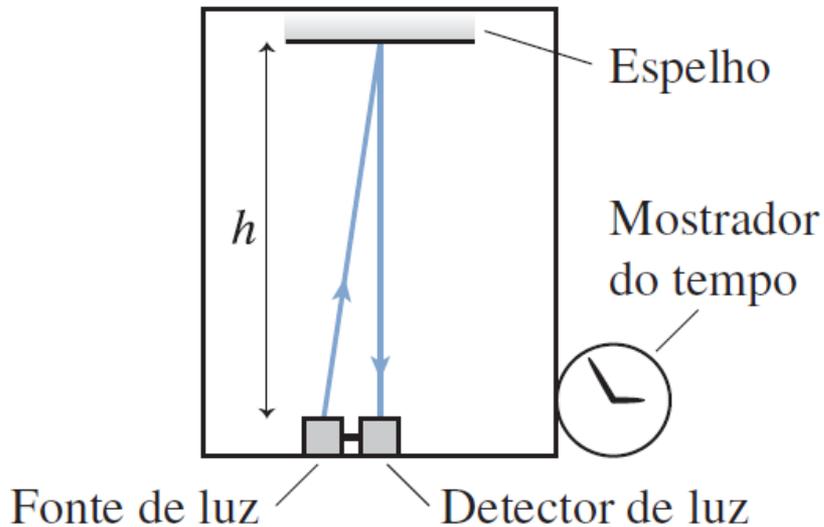
A simultaneidade é relativa

# O que é um relógio?

R: qualquer processo físico que se repete a intervalos regulares de tempo



# Relógio de luz



Considere 2 eventos:

- i) um pulso de luz é emitido**
- e**
- ii) o pulso retorna e é detectado.**

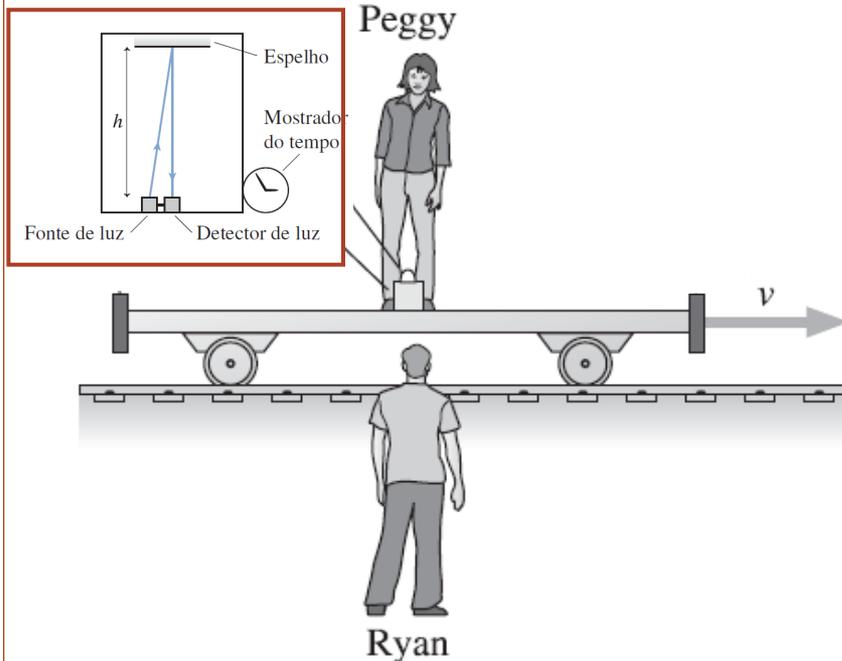
**o tempo entre esses dois eventos corresponde a um 'tique' do relógio**

**No referencial  $S'$  onde o relógio está em repouso, esse tempo vale**

$$\Delta t' = \frac{2h}{c}$$

# Comparando o tempo em 2 referenciais

O exemplo de Ryan e Peggy indica que o tempo “passa” diferente em referenciais em movimento relativo. Podemos usar o relógio de luz para calcular quanto vale essa diferença



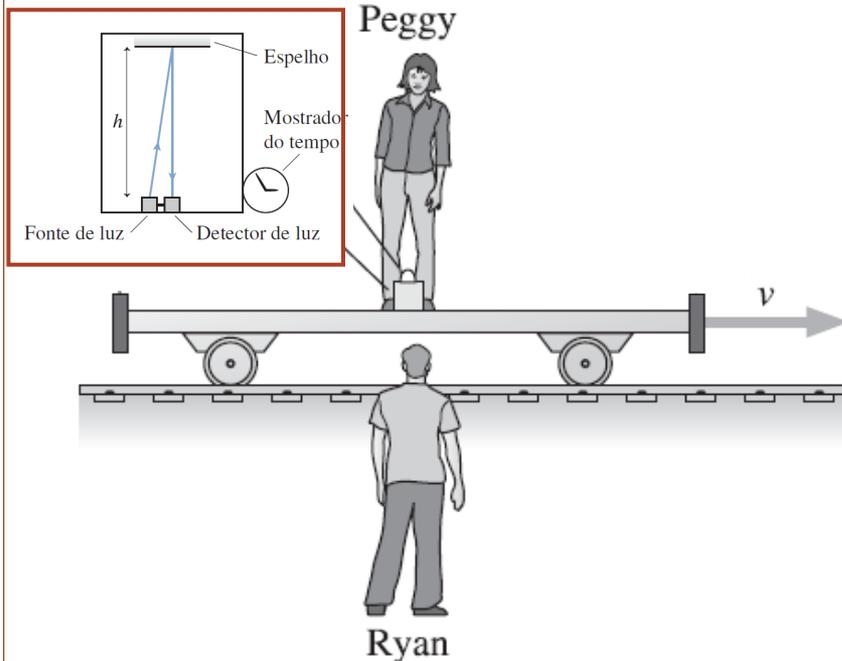
O relógio está em repouso no referencial  $S'$  (de Peggy), no qual o tempo entre o evento 1 (emissão) e o evento 2 (detecção) é

$$\Delta t' = \frac{2h}{c}$$

P: e no referencial  $S$  (de Ryan)?  
Qual é a diferença de tempo entre os mesmos dois eventos?

# Comparando o tempo em 2 referenciais

O exemplo de Ryan e Peggy indica que o tempo “passa” diferente em referenciais em movimento relativo. Podemos usar o relógio de luz para calcular quanto vale essa diferença



## Teste conceitual

No ref. S (de Ryan), chamemos de:

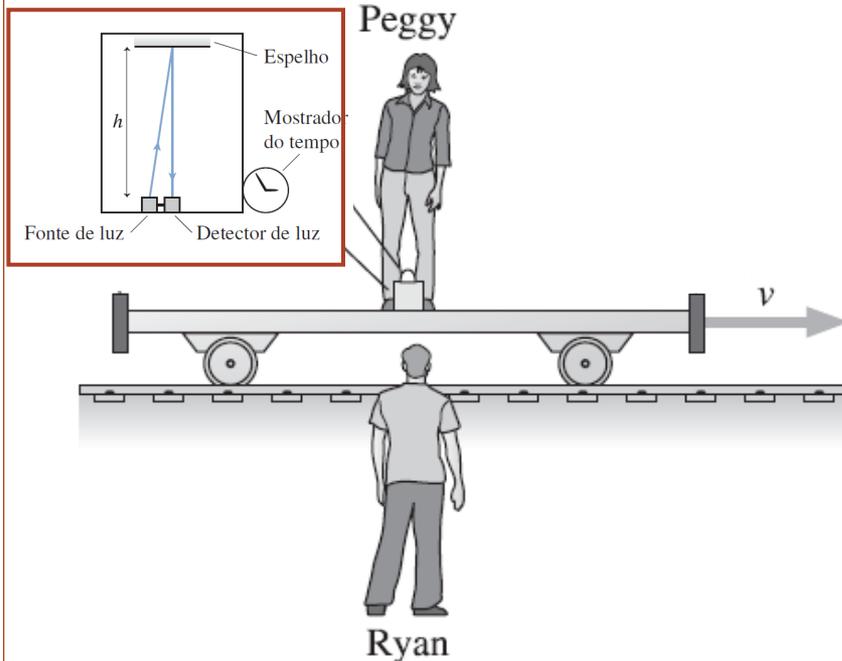
- **L**: a distância percorrida pela luz entre o evento 1 e o evento 2
- **$\Delta t$** : tempo decorrido entre esses dois eventos

Podemos concluir que

- A)  $L = 2h, \Delta t = \Delta t'$
- B)  $L > 2h, \Delta t = \Delta t'$
- C)  $L > 2h, \Delta t > \Delta t'$
- D)  $L > 2h, \Delta t < \Delta t'$

# Comparando o tempo em 2 referenciais

O exemplo de Ryan e Peggy indica que o tempo “passa” diferente em referenciais em movimento relativo. Podemos usar o relógio de luz para calcular quanto vale essa diferença



## Teste conceitual

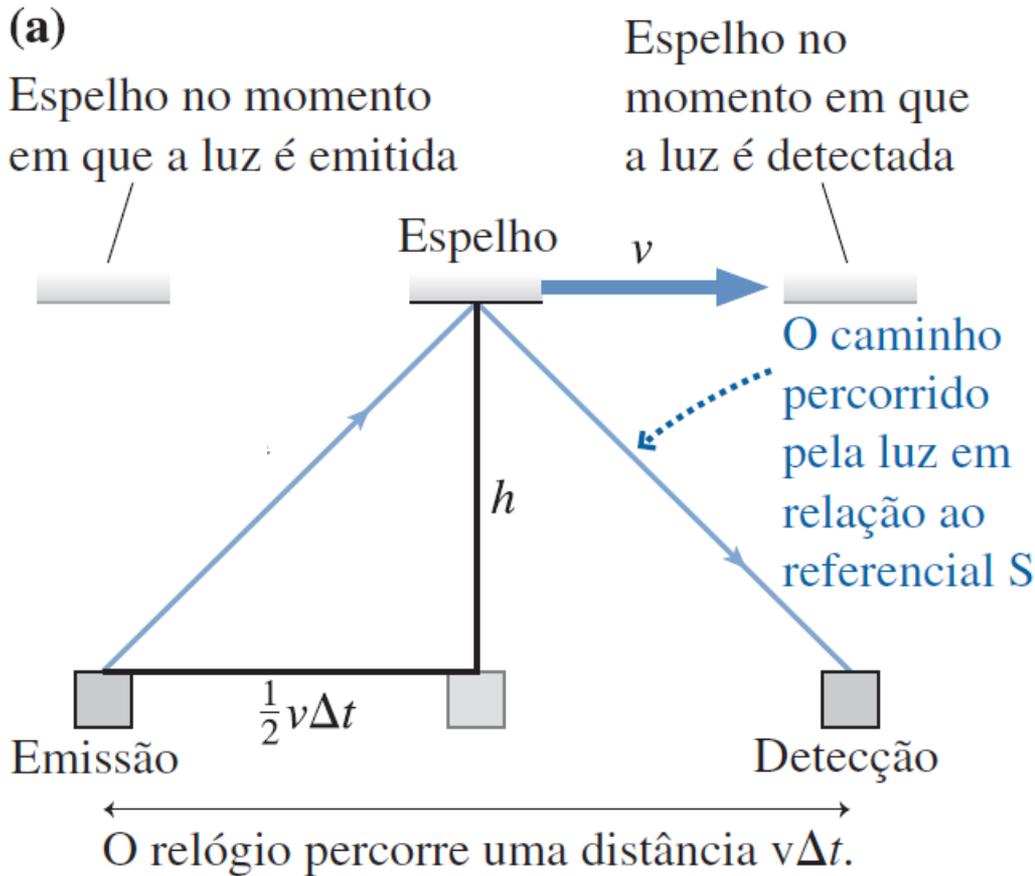
No ref. S (de Ryan), chamemos de:

- $L$ : a distância percorrida pela luz entre o evento 1 e o evento 2
- $\Delta t$ : tempo decorrido entre esses dois eventos

Podemos concluir que

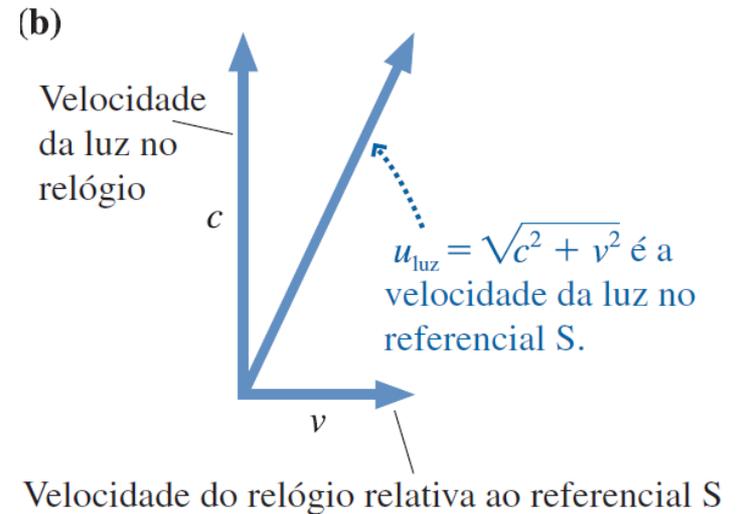
- A)  $L = 2h, \Delta t = \Delta t'$
- B)  $L > 2h, \Delta t = \Delta t'$
- C)  $L > 2h, \Delta t > \Delta t'$
- D)  $L > 2h, \Delta t < \Delta t'$

# Comparando o tempo em 2 referenciais



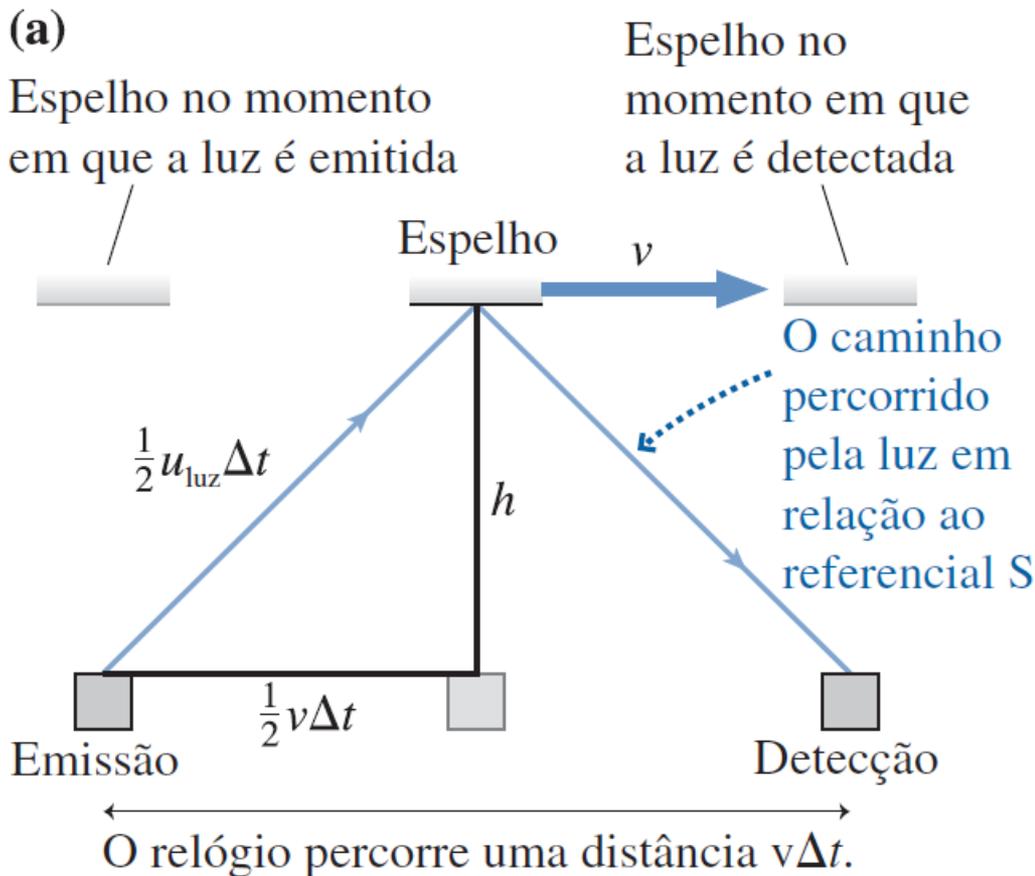
## Análise Clássica (incorreta)

$$u_{luz} = \left\| \vec{u}'_{luz} + \vec{v} \right\|$$



→  $\Delta t = \frac{2h}{c} = \Delta t'??$

# Dilatação temporal



## Análise Relativística (correta)

$$u_{\text{luz}} = c !!!$$

$$\Delta t = \frac{2h/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma \Delta t'$$

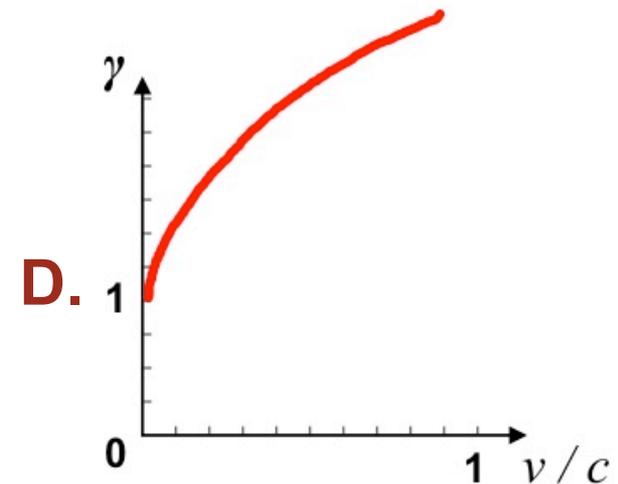
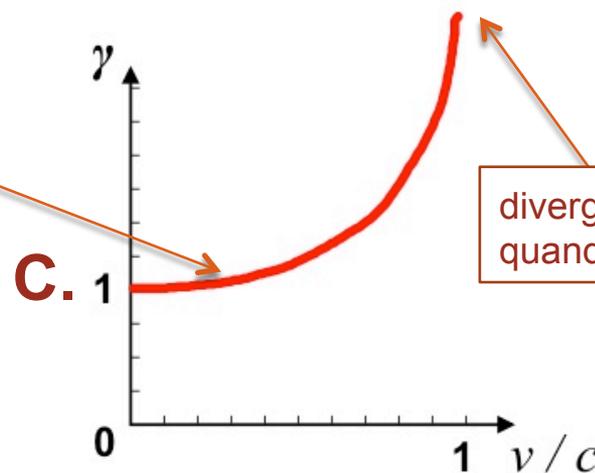
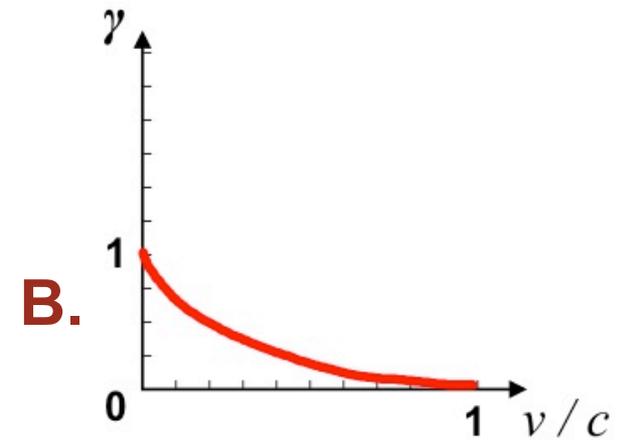
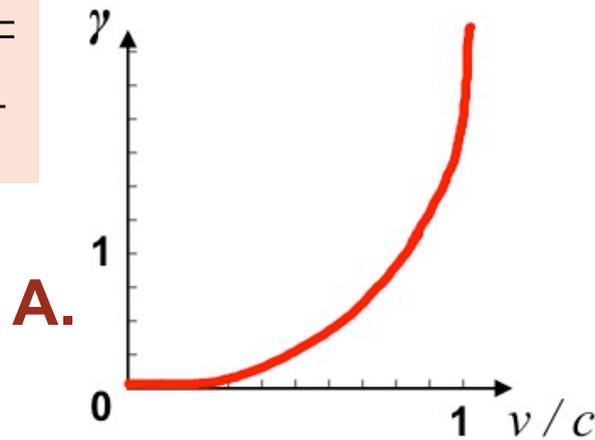
onde

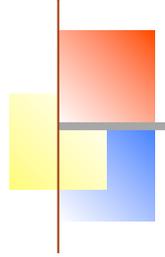
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \beta^2 \equiv \frac{v^2}{c^2}$$

# Pergunta conceitual

P: como é a dependência de  $\gamma$  com  $v$  ?

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$





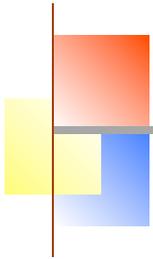
# Dilatação temporal

---

**Conclusão:** o tempo  $\Delta t$  entre os dois eventos, conforme medido no referencial  $S$  em que o relógio se move, é *maior* do que o tempo  $\Delta t'$  registrado no referencial  $S'$  onde o relógio está em repouso. Chamamos esse efeito de

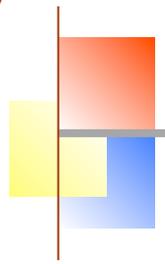
**DILATAÇÃO TEMPORAL**

# Tempo próprio



Def: **tempo próprio**  $\Delta\tau$  = tempo medido por um relógio entre dois eventos que ocorrem **no mesmo ponto do espaço, no referencial de repouso do próprio relógio**. No exemplo acima: o tempo próprio entre dois 'tiques' é  $\Delta\tau = \Delta t'$  (tempo medido no referencial de Peggy).

Em qualquer outro referencial inercial (em movimento com respeito ao relógio), o tempo entre esses eventos será **maior que o tempo próprio**, por um fator  $\gamma > 1$ .

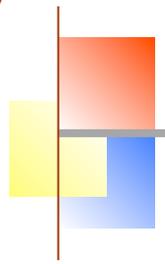


# Dilatação temporal

---

**Pergunta conceitual: na sua opinião, a dilatação temporal**

- A) Nunca foi observada no mundo real, e portanto essa teoria tem de estar errada!**
- B) É um efeito da percepção do Ryan. O tempo real entre os eventos é o medido por Peggy (tempo próprio).**
- C) É real, mas se aplica apenas ao relógio de luz. Relógios comuns, com componentes mecânicos / eletrônicos, não indicam dilatação apreciável.**
- D) É real e se aplica igualmente a qualquer tipo de relógio.**



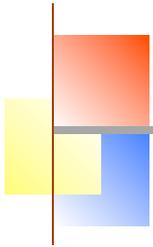
# Dilatação temporal

---

**Pergunta conceitual: na sua opinião, a dilatação temporal**

- A) Nunca foi observada no mundo real, e portanto essa teoria tem de estar errada!**
- B) É um efeito da percepção do Ryan. O tempo real entre os eventos é o medido por Peggy (tempo próprio).**
- C) É real, mas se aplica apenas ao relógio de luz. Relógios comuns, com componentes mecânicos / eletrônicos, não indicam dilatação apreciável.**
- D) É real e se aplica igualmente a qualquer tipo de relógio.**

# Dilatação temporal



Exemplo: Saturno dista  $1,43 \times 10^{12}$  m do Sol, num referencial em repouso com respeito ao Sistema Solar. O foguete da astronauta Ana viaja em linha reta do Sol a Saturno com uma velocidade constante de  $0,9c$  relativa ao sistema solar.

Quanto tempo levará para o foguete de Ana realizar o percurso em relação a Victor, que está na Terra (assumindo a Terra em repouso, por simplicidade)? E em relação a Ana?

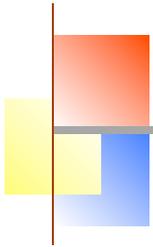
**Antes de responder, pense:**

**P1: quais são os 2 eventos nesta pergunta?**

**P2: qual desses tempos é um tempo próprio?**

- A) O medido por Victor**
- B) O medido por Ana**
- C) Ambos**

# Dilatação temporal



Exemplo: Saturno dista  $1,43 \times 10^{12}$  m do Sol, num referencial em repouso com respeito ao Sistema Solar. O foguete da astronauta Ana viaja em linha reta do Sol a Saturno com uma velocidade constante de  $0,9c$  relativa ao sistema solar.

Quanto tempo levará para o foguete de Ana realizar o percurso em relação a Victor, que está na Terra (assumindo a Terra em repouso, por simplicidade)? E em relação a Ana?

**Antes de responder, pense:**

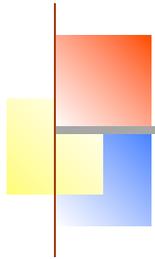
**P1: quais são os 2 eventos nesta pergunta?**

**P2: qual desses tempos é um tempo próprio?**

- A) O medido por Victor**
- B) O medido por Ana**
- C) Ambos**

# Dilatação temporal

---



## Exemplo de resposta incorreta

Somente Ana mede o tempo próprio. Pois ela se encontra no referencial de repouso.

**Antes de responder, pense:**

**P1: quais são os 2 eventos nesta pergunta?**

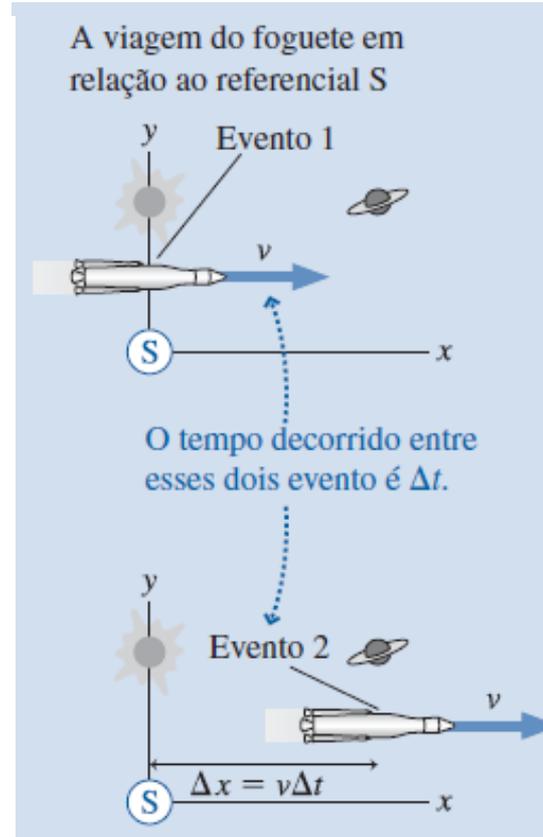
**P2: qual desses tempos é um tempo próprio?**

- A) O medido por Victor**
- B) O medido por Ana**
- C) Ambos**

# Dilatação temporal

Saturno dista  $1,43 \times 10^{12}$  m do Sol, num referencial em repouso com respeito ao Sistema Solar. O foguete da astronauta Ana viaja em linha reta do Sol a Saturno com uma velocidade constante de  $0,9c$  relativa ao sistema solar.

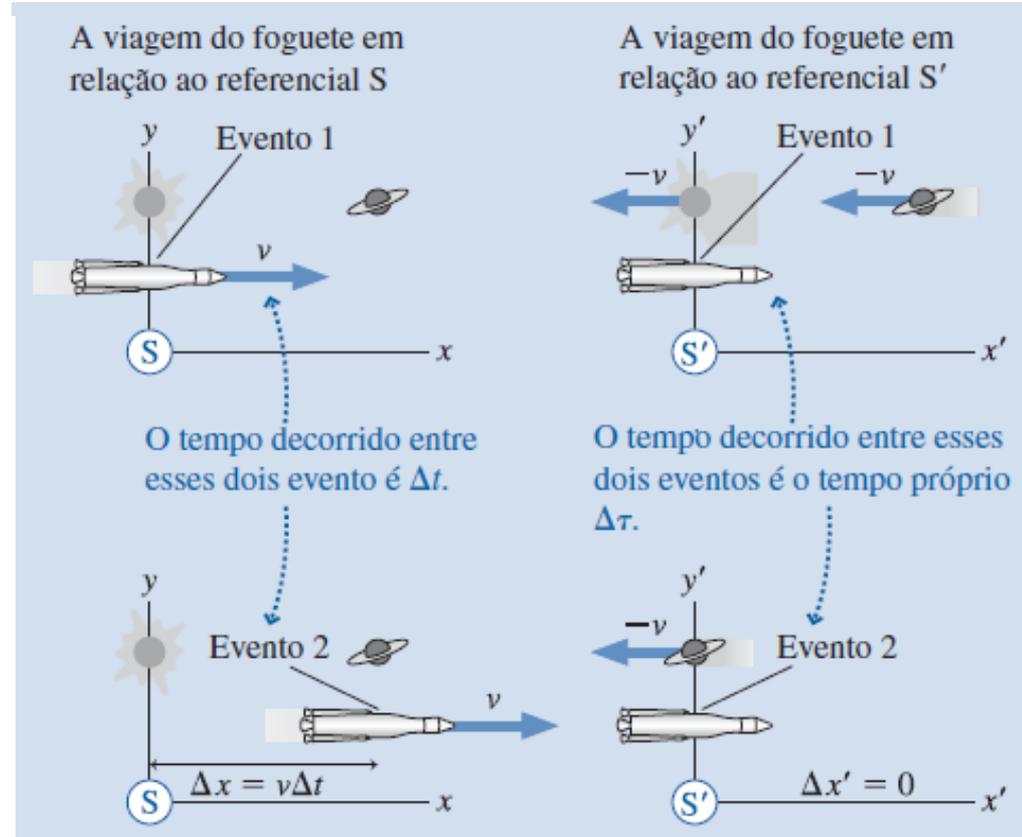
Quanto tempo levará para o foguete de Ana realizar o percurso em relação a Victor, que está na Terra (assumindo a Terra em repouso, por simplicidade)? E em relação a Ana?



# Dilatação temporal

Saturno dista  $1,43 \times 10^{12}$  m do Sol, num referencial em repouso com respeito ao Sistema Solar. O foguete da astronauta Ana viaja em linha reta do Sol a Saturno com uma velocidade constante de  $0,9c$  relativa ao sistema solar.

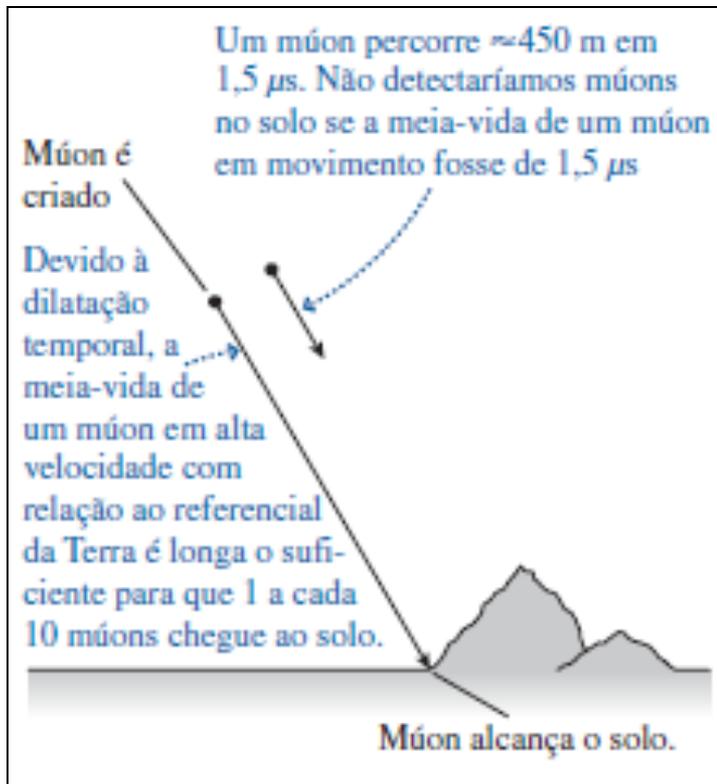
Quanto tempo levará para o foguete de Ana realizar o percurso em relação a Victor, que está na Terra (assumindo a Terra em repouso, por simplicidade)? E em relação a Ana?



R:  $\Delta t_V = 5300$  s, e  $\Delta t_A = \Delta\tau = 2310$  s  
Obs: Ambos são reais!!!

# Evidência experimental direta

**Múons** são partículas subatômicas instáveis, que são criados constantemente na alta atmosfera (60km). Cerca de 10% deles são observados chegando ao solo, com velocidade  $v = 0,99969 c$



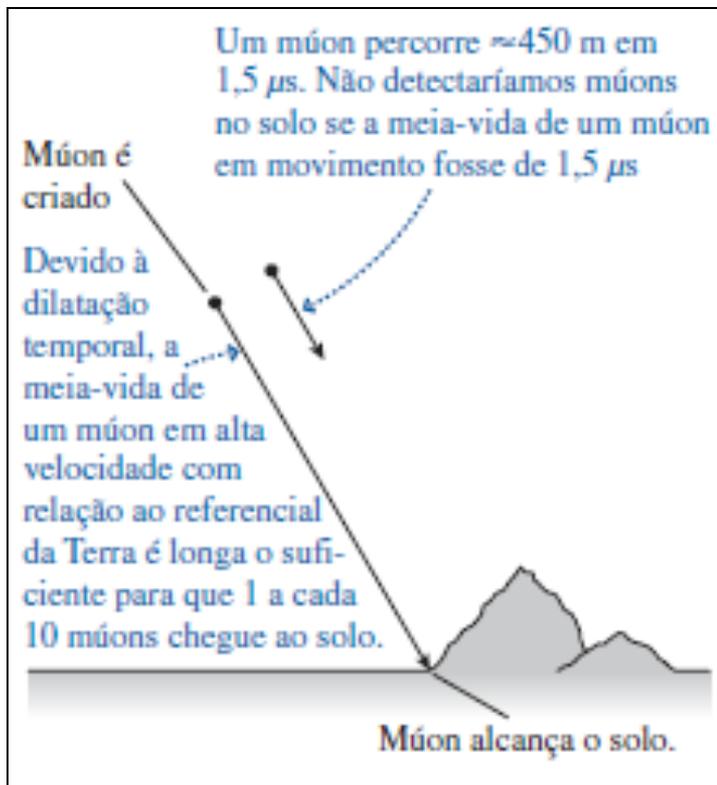
**Problema:** sabemos que o tempo de meia-vida de um múon é de apenas  $1,5 \mu s$ , correspondendo a percorrer apenas 450m. Após isso ele já tem 50% de chance de ter se desintegrado!!

**A fração dos múons capazes de percorrer 60km =  $133 \times 450$ m seria apenas**

$$(0,5)^{133} \sim 10^{-40} !!!!!$$

# Evidência experimental direta

**Múons** são partículas subatômicas instáveis, que são criados constantemente na alta atmosfera (60km). Cerca de 10% deles são observados chegando ao solo, com velocidade  $v = 0,99969 c$



**Solução: no referencial do solo**, o tempo para a queda dos múons é

$$\Delta t = L / v = 200 \mu\text{s}$$

Porém, devido à dilatação temporal, isto corresponde a **apenas  $\tau = 5 \mu\text{s}$  no referencial dos múons** (pois  $\gamma \sim 40$ ). Assim, a fração dos múons que chega deve de fato ser

$$(0,5)^{(5 \mu\text{s} / 1,5 \mu\text{s})} \sim 0.1 \text{ !!!!!}$$



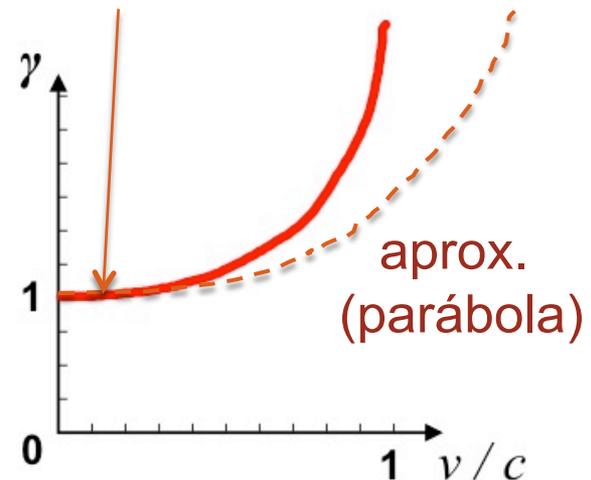
# Aproximação útil quando $v \ll c$

Recordando Série de Taylor:

$$f(x) = (1 + x)^s = 1 + x \cdot \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=0} + (\dots) \simeq 1 + sx \quad \text{se } |x| \ll 1$$

$$\text{se } v \ll c : \begin{cases} \gamma^{-1} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \simeq 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \\ \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \end{cases}$$

$$\text{Se } v \ll c : \gamma^{\pm 1} \simeq 1 \pm \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$



# E a baixas velocidades?

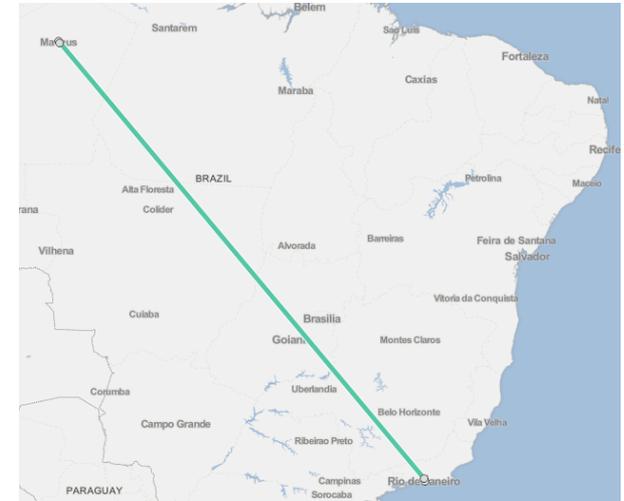
Um avião viaja a  $1080\text{km/h} = 300\text{m/s}$  entre o Rio e Manaus ( $4374\text{km}$  de distância). Qual é a diferença entre o tempo de viagem medido pelos passageiros, e o medido por alguém no solo?

- A) Da ordem de ms ( $10^{-3}$  s)
- B) Da ordem de  $\mu\text{s}$  ( $10^{-6}$  s)
- C) Da ordem de ns ( $10^{-9}$  s)
- D) Da ordem de ps ( $10^{-12}$  s)

Solução:  $t_{\text{solo}} = 4374\text{km}/1080\text{km/h} = 4,05\text{h}$

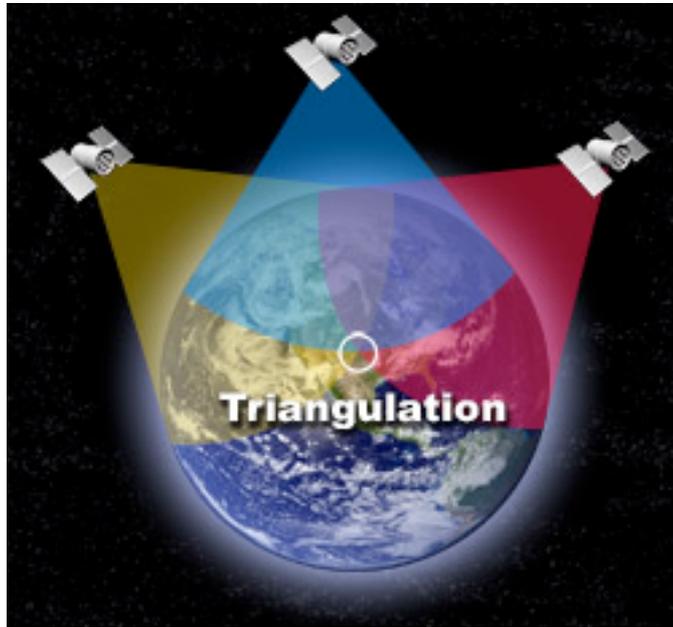
$$\beta = 10^{-6} \Rightarrow t_{\text{avião}} = t_{\text{solo}} / \gamma \sim t_{\text{solo}} (1 - \frac{1}{2} 10^{-12})$$

Portanto:  $t_{\text{solo}} - t_{\text{avião}} = 4,05\text{h} * 0.5 * 10^{-12} \sim 7 \times 10^{-9}\text{s}$



Um experimento análogo foi de fato realizado em 1971, confirmando o efeito.

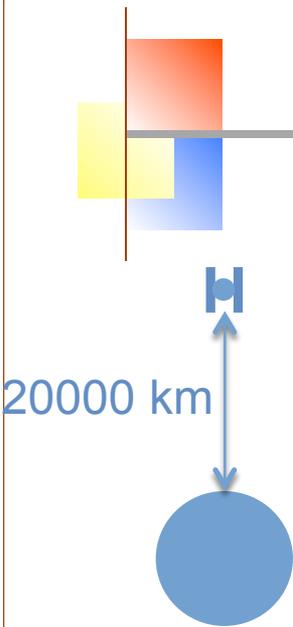
# Dilatação temporal e GPS



- GPS recebe sinais de satélites orbitando a cerca de 20.000km de altitude.
- Sinais têm uma assinatura temporal, a qual permite saber quanto tempo passou desde que foi enviado, portanto a distância do satélite no momento do envio.
- Como a órbita dos satélites é conhecida, se pelo menos 3 forem detectados pode-se localizar o receptor por triangulação.

Problema: sem levar em conta os efeitos de dilatação temporal previstos pela relatividade, esses tempos e posições estarão *errados!*

# Dilatação temporal e GPS



**Desafio: estimar qual o erro na distância inferida com respeito a um satélite GPS que se acumula durante apenas 1h (medido no relógio do satélite) devido ao efeito de dilatação temporal da relatividade especial.**

Passo 1: calcule a velocidade orbital do satélite (usando a Lei da Gravitação Universal de Newton). **R:  $v = 4\text{km/s}$**

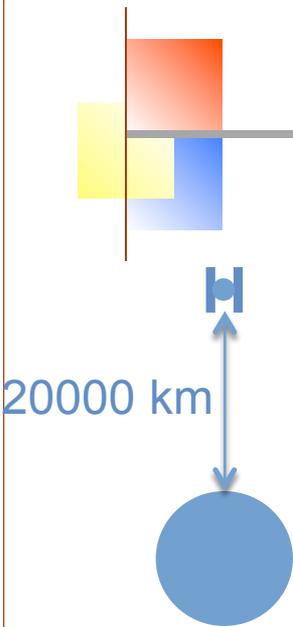
Passo 2: obtenha o fator  $\gamma$  do satélite, e use-o para calcular o tempo medido no referencial do solo que corresponde a 1h no relógio do satélite

$$\mathbf{R: t = 1\text{h} + 3 \times 10^{-7}\text{s}}$$

Passo 3: qual a distância que a luz percorre nesse intervalo adicional? Esse é o erro se você esquecer da relatividade ao estimar sua posição!

$$\mathbf{R: cerca de 90\text{m!}}$$

# Dilatação temporal e GPS



**Desafio: estimar qual o erro na distância inferida com respeito a um satélite GPS que se acumula durante apenas 1h (medido no relógio do satélite) devido ao efeito de dilatação temporal da relatividade especial.**

**Obs: o cálculo real é mais complicado, pois o referencial do satélite *não é inercial*, já que ele percorre uma curva! Nesse caso, também é preciso levar em conta outros efeitos previstos pela *Teoria da Relatividade Geral* .**

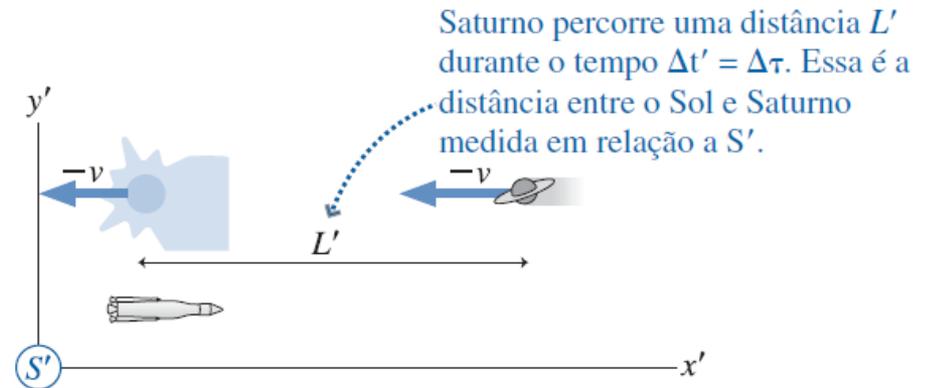
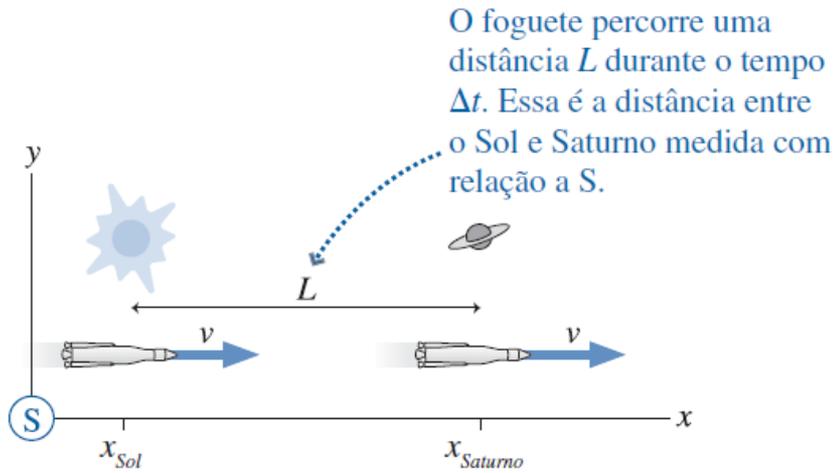
**Sem isso o sistema GPS não funcionaria!!**

# Contração Espacial

## De volta ao foguete de Ana:

(a) Referencial S: o Sistema Solar está estacionário.

(b) Referencial S': e foguete está parado.



O foguete de Ana viaja em linha reta do Sol até Saturno com velocidade  $0.9c$  relativamente ao referencial S do sistema solar. A distância Saturno-Sol é de  $1,43 \times 10^{12} \text{m}$  nesse referencial.

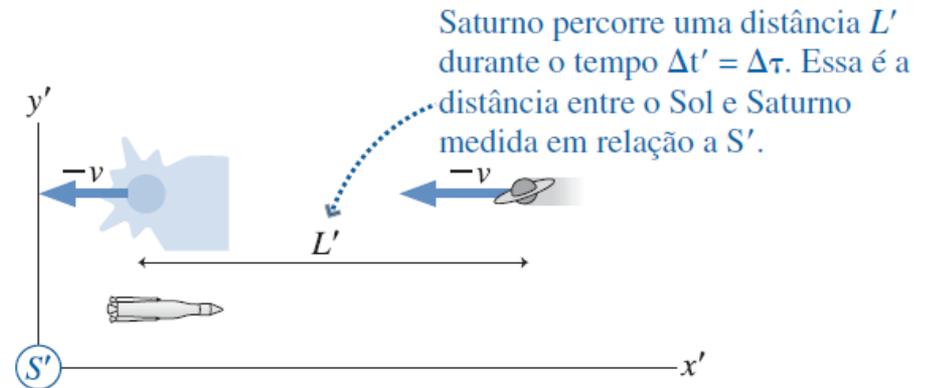
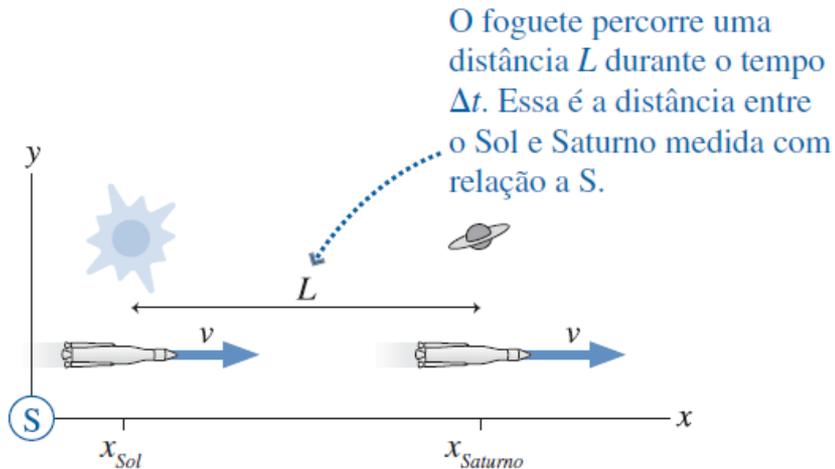
P: Qual é a distância entre o Sol e Saturno medida em relação ao referencial S' de Ana?

# Contração Espacial

## De volta ao foguete de Ana:

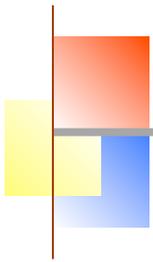
(a) Referencial S: o Sistema Solar está estacionário.

(b) Referencial S': e foguete está parado.



$$L' = \sqrt{1 - (\beta)^2} L = L/\gamma \leq L$$

R: se  $\beta = 0.9$  e  $L = 1,43 \times 10^{12}$  m:  $L' = 0,62 \times 10^{12}$  m.

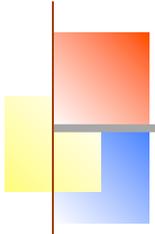


# Contração Espacial

**Conclusão:** se dois objetos estão parados um em relação ao outro, a distância espacial  $L$  entre eles no referencial  $S$  onde ambos estão em repouso é *maior* do que a distância  $L'$  registrada em qualquer outro referencial inercial  $S'$  onde os objetos se movem. Chamamos esse efeito de

## CONTRAÇÃO ESPACIAL

**Mais geralmente, podemos medir a distância entre dois eventos quaisquer, e verificamos que ela também depende do referencial !**



# Distância própria

Def: **distância própria**  $l$  = distância medida por um régua entre dois eventos que ocorrem simultaneamente, ie, **no mesmo instante do tempo, no referencial inercial de repouso da régua.**

Em qualquer outro referencial inercial (em movimento com respeito à régua), a distância entre esses eventos será **menor que a distância própria**, por um fator  $\gamma > 1$ .

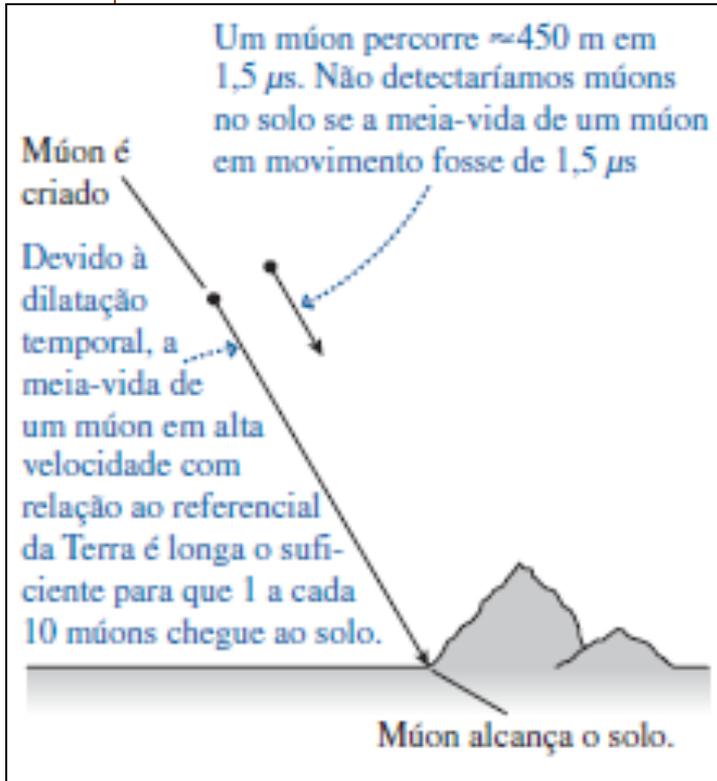
**Obs 1:** A distância entre *objetos* em repouso um em relação ao outro é **um caso particular**. Nesse caso, a distância própria é aquela medida por uma régua em repouso em relação aos objetos

**Obs 2: distância própria  $\neq$  distância “real” !!**

Esta última não existe! (cada observador tem a sua!)

# Ex: Revendo os múons

Criados a aprox.  $L = 60\text{km}$  de altitude com  $v = 0,99969 c$



No referencial do solo, o tempo de queda é

$$\Delta t = L / v = 200\ \mu\text{s}$$

Porém, devido à dilatação temporal, isto corresponde a **apenas  $\tau = 5\ \mu\text{s}$  no referencial dos múons** (pois  $\gamma \sim 40$ ). Assim, a fração dos múons que chega é

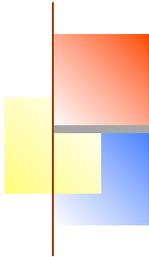
$$(0,5)^{(5\ \mu\text{s} / 1,5\ \mu\text{s})} \sim 0.1 \text{ !!!!!}$$

Visto de outra forma, **no referencial dos múons**, a distância até o chão é contraída para apenas

$$L' = L / \gamma = 60\text{km} / 40 = 1,5\ \text{km}$$

Novamente, a fração que chega é

$$(0,5)^{(1,5\text{km} / 450\text{m})} \sim 0.1$$



## E para baixas velocidades?

---

$$\text{Se } v \ll c : \gamma^{\pm 1} \simeq 1 \pm \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

37.9 – Um ônibus escolar de 8,0 m de comprimento passa a 30 m/s. Qual é o valor de sua contração espacial?

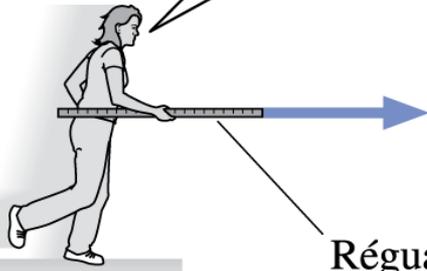
Solução:  $L' = l = 8,0$  m no ref.  $S'$  do ônibus (comprimento/distância próprio)

$$L = l/\gamma \simeq \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) l$$

*Resposta:*  $l - L = 4 \times 10^{-14}$  m

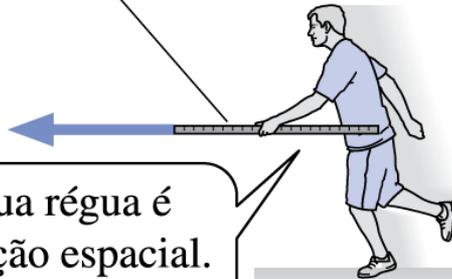
# Paradoxo?

Sua régua é mais curta que a minha.  
Ocorreu contração espacial porque  
você está se movendo relativamente  
a mim.



Carmen

Réguas



Dan

Não pode ser. A sua régua é  
que sofreu contração espacial.  
Ela é a régua mais curta.

**P: Quem está certo?**

**A) Carmen**

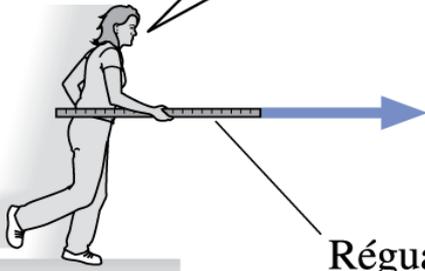
**B) Dan**

**C) Ambos**

**D) Nenhum dos dois: as duas  
réguas tem comprimentos  
iguais nos dois referenciais.**

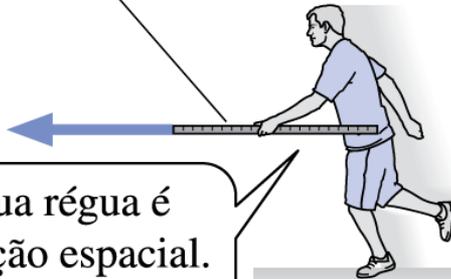
# Paradoxo?

Sua régua é mais curta que a minha.  
Ocorreu contração espacial porque  
você está se movendo relativamente  
a mim.



Carmen

Réguas



Dan

Não pode ser. A sua régua é  
que sofreu contração espacial.  
Ela é a régua mais curta.

**P: Quem está certo?**

**A) Carmen**

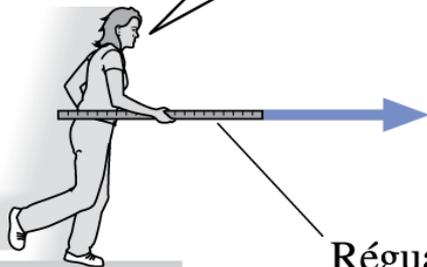
**B) Dan**

**C) Ambos**

**D) Nenhum dos dois: as duas  
réguas tem comprimentos  
iguais nos dois referenciais.**

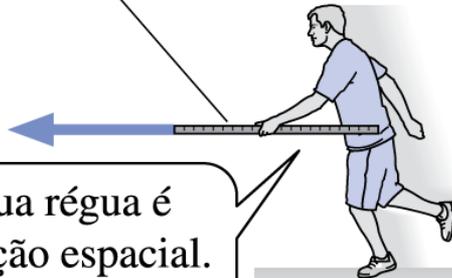
# Paradoxo?

Sua régua é mais curta que a minha. Ocorreu contração espacial porque você está se movendo relativamente a mim.



Carmen

Réguas



Dan

Não pode ser. A sua régua é que sofreu contração espacial. Ela é a régua mais curta.

Para medir o comprimento de um corpo em movimento, é preciso medir *simultaneamente* a posição de cada extremidade

Ex: No Ref.  $S'$  de Dan, são simultâneos:

- Ev1: Dan mede a posição da ponta esquerda da régua de Carmen
- Ev2: Dan mede a posição da ponta direita da régua de Carmen

P: No Ref.  $S$  de Carmen, qual é a ordem desses eventos?

Dica: pense em como Carmen explica o fato de Dan medir uma régua contraída

A)  $t_1 < t_2$

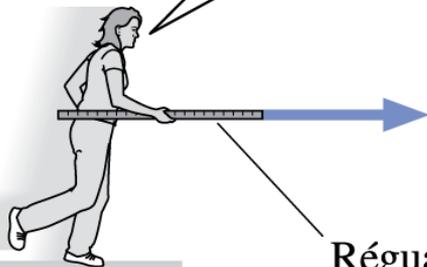
B)  $t_2 < t_1$

C)  $t_1 = t_2$

D) Depende de  $v$

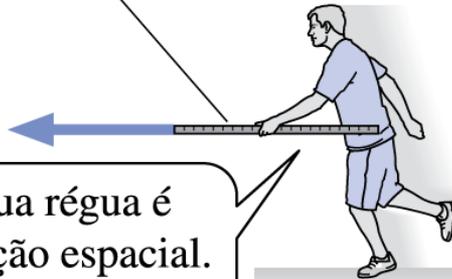
# Paradoxo?

Sua régua é mais curta que a minha. Ocorreu contração espacial porque você está se movendo relativamente a mim.



Carmen

Réguas



Dan

Não pode ser. A sua régua é que sofreu contração espacial. Ela é a régua mais curta.

Para medir o comprimento de um corpo em movimento, é preciso medir **simultaneamente** a posição de cada extremidade

- **Solução:** eventos simultâneos para Dan *não são simultâneos* para Carmen, e vice-versa!
- Para Carmen, Dan mede *primeiro* a posição da ponta da frente da régua dela, e *depois* a de trás. Ben diz que Carmen faz o mesmo com a régua dele...

A)  $t_1 < t_2$

B)  $t_2 < t_1$

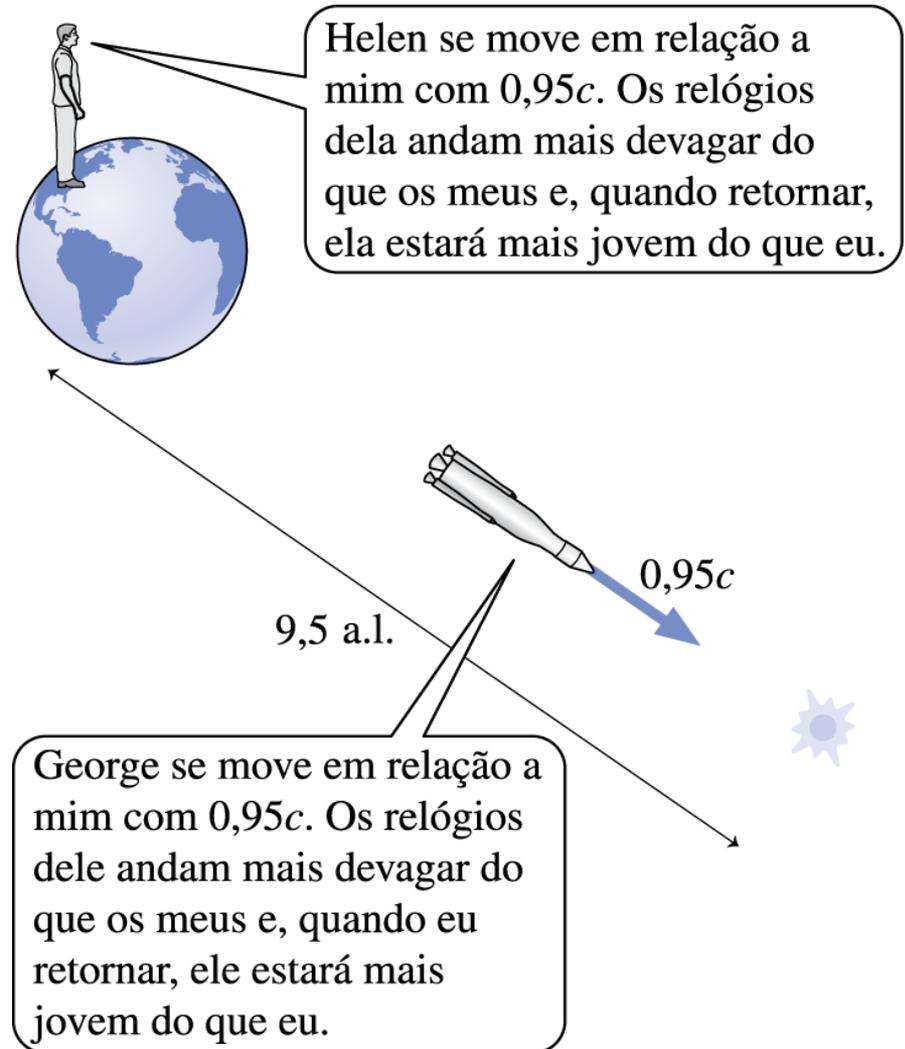
C)  $t_1 = t_2$

D) Depende de  $v$

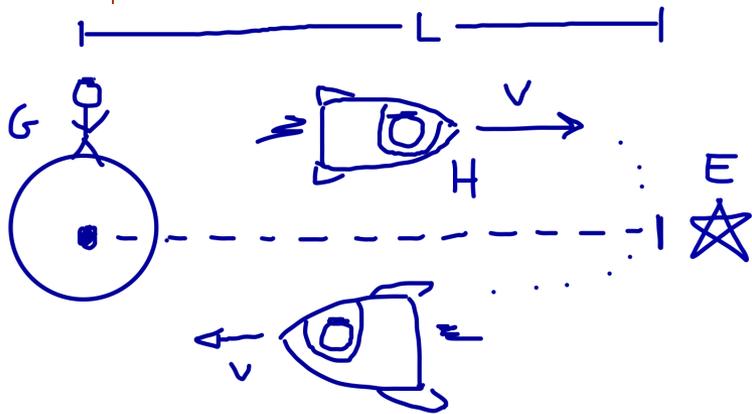
# “Paradoxo” dos Gêmeos

George e Helen são gêmeos: Helen parte em uma viagem até uma estrela distante. Quando ela volta à Terra, quem estará mais jovem, George ou Helen? Ou terão a mesma idade?

- A) George
- B) Helen
- C) Mesma idade



# “Paradoxo” dos Gêmeos - a solução (obs: não está no livro!)



(visão do ref. de G)

Ref. de G :

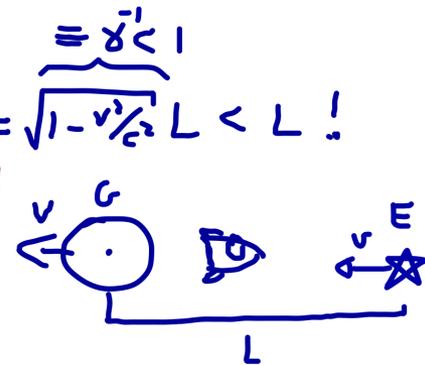
distância entre G e E:  $L$

tempo até reencontro:  $t_G = \frac{2L}{v}$

Ref. da ida de H

distância entre H e E:  $L' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L < L!$

tempo de ida:  $t_{H1} = \frac{\delta L}{v}$



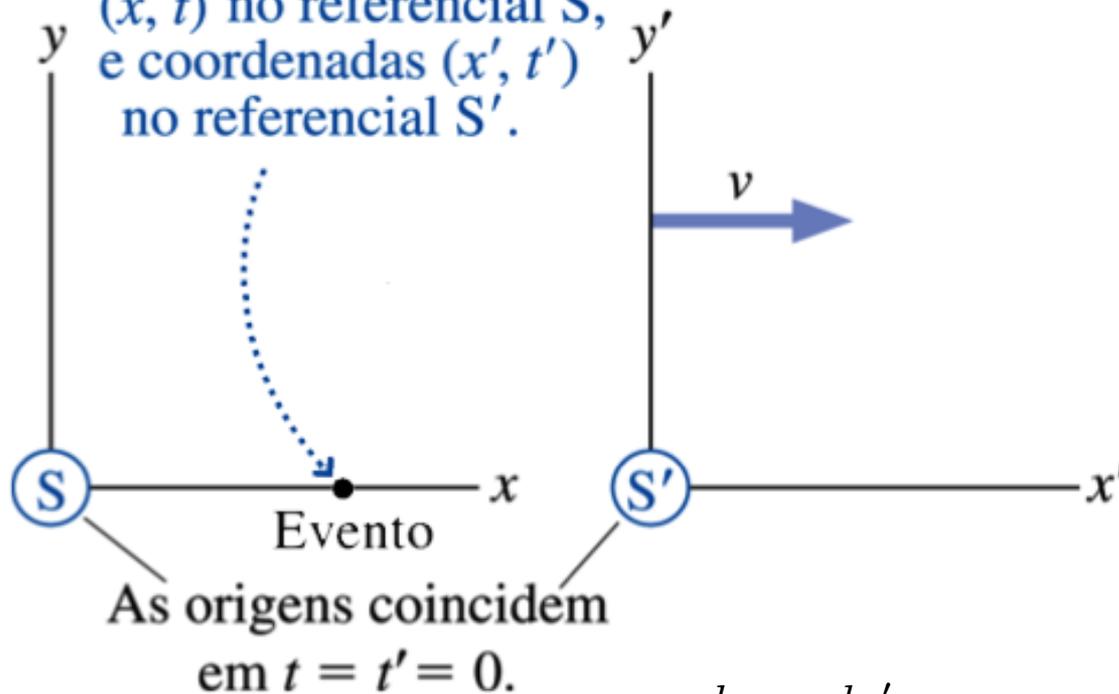
Ref. da volta de H : novamente  $L' = \delta L \rightarrow t_{H2} = \frac{\delta L}{v}$

$\rightarrow t_H = \frac{2L}{\delta v} < t_G!$

$\rightarrow$  H está mais nova que G!

# Transformações de Galileu

Um evento possui coordenadas espaço-temporais  $(x, t)$  no referencial  $S$ , e coordenadas  $(x', t')$  no referencial  $S'$ .



~~$$x = x' + vt'$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$~~

~~$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v = u'_x + v$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} = u'_y$$

$$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} = u'_z$$~~

# Transformações de Lorentz

As transformações corretas têm de satisfazer quatro condições:

1) Concordar com as transformações de Galileu no limite de baixas velocidades;  $v \ll c$

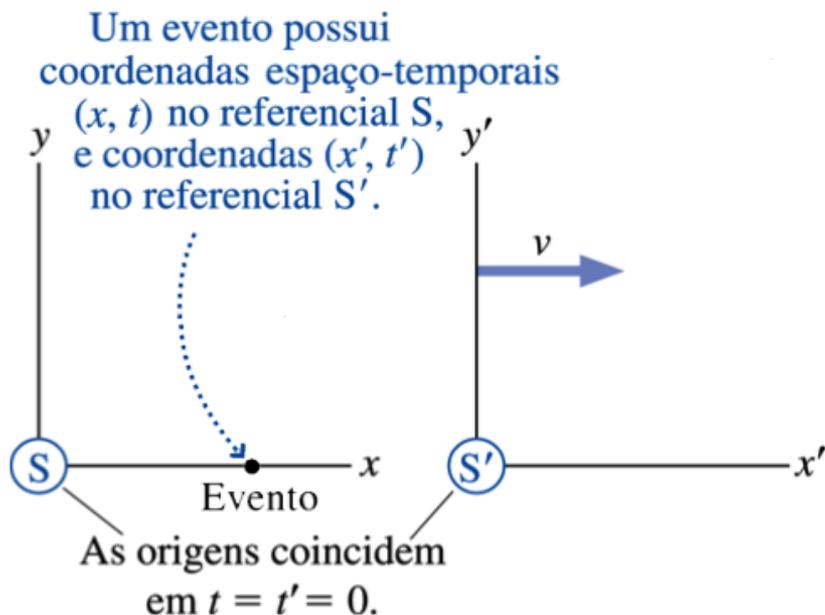
2) Transformar não apenas as coordenadas espaciais, mas também a coordenada temporal.

3) Assegurar que a velocidade da luz seja sempre a mesma,  $c$ , em todos os referenciais.

4) Serem *lineares*:

$$x' = a x + b t \quad \text{e} \quad t' = A x + B t,$$

onde  $a$ ,  $b$ ,  $A$  e  $B$  são constantes que dependem apenas de  $v$

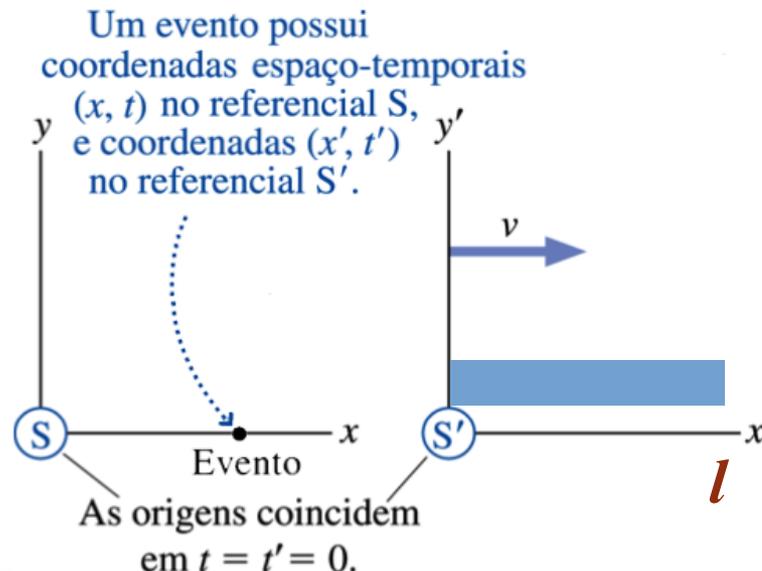


# Transformações de Lorentz: dedução

- **Evento 1:** um relógio localizado na origem de  $S'$  ( $x'_1 = 0$ ) marca  $t'_1$ 
  - No ref.  $S$ , este evento tem coordenadas ( $x_1 = vt_1, t_1$ ) para algum  $t_1$ .  
Substituindo na transformação:

$$0 = x'_1 = av t_1 + bt_1 \longrightarrow b = -av \longrightarrow \mathbf{x' = a ( x - v t )}$$

Considere agora uma régua de comprimento próprio  $l$ , que está parada no referencial  $S'$ , indo de  $x' = 0$  até  $x' = l$



# Transformações de Lorentz: dedução

- **Evento 2:** A ponta da régua passa por um relógio parado no referencial  $S$ , no mesmo instante  $t_1$  do Evento 1. Chamando de  $x_2$  a posição deste evento no referencial  $S$  e substituindo na transformação:

$$l = x'_2 = a (x_2 - v t_1) = a (x_2 - x_1)$$

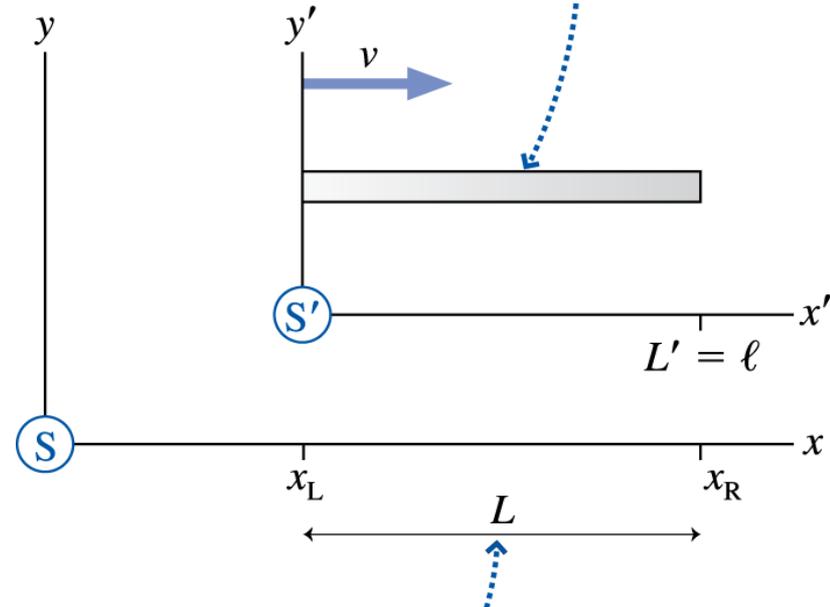
- Mas sabemos que, pela contração espacial, as distâncias entre os dois eventos nos dois referenciais satisfazem:

$$x_2' - x_1' = \gamma (x_2 - x_1)$$

**Conclusão:**  $a = \gamma$   $\longrightarrow$

$$\mathbf{x}' = \gamma (\mathbf{x} - \mathbf{v} t)$$

O objeto encontra-se em repouso no referencial  $S'$ . Seu comprimento é  $L' = \ell$ , que pode ser medido a qualquer instante.



Devido ao objeto estar em movimento no referencial  $S$ , a fim de que possamos encontrar seu comprimento  $L$  no referencial  $S$  devemos efetuar medições simultâneas de suas extremidades.

# Transformações de Lorentz: dedução

$$\mathbf{x}' = \gamma (\mathbf{x} - \mathbf{v} t)$$

- Usando os mesmos argumentos mas com uma régua parada no referencial  $S$ , podemos concluir também que

$$\mathbf{x} = \gamma (\mathbf{x}' + \mathbf{v} t')$$

- Resolvendo para  $t'$  em função de  $x$ ,  $t$  :

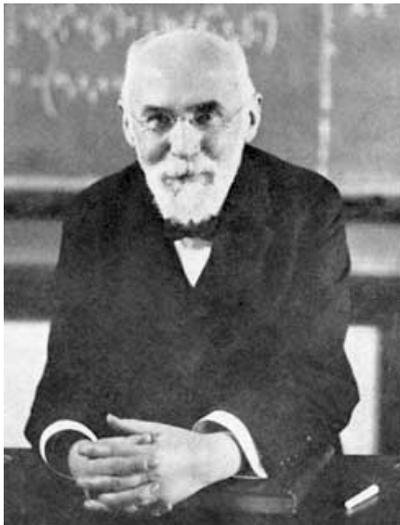
$$t' = \gamma (t - \mathbf{v} \mathbf{x} / c^2)$$

# Transformações de Lorentz: dedução

As transformações corretas têm de satisfazer quatro condições:

$$x' = \gamma (x - v t)$$

$$t' = \gamma (t - v x / c^2)$$



Hendrik Lorentz

1) Concordar com as transformações de Galileu no limite de baixas velocidades;  $v \ll c$  ✓

2) Transformar não apenas as coordenadas espaciais, mas também a coordenada temporal. ✓

3) Assegurar que a velocidade da luz seja sempre a mesma,  $c$ , em todos os referenciais. ✓

4) Serem *lineares*: ✓

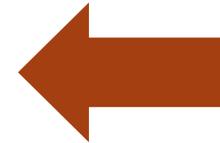
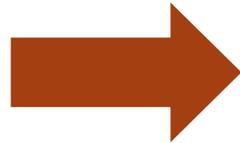
$$x' = a x + b t \quad \text{e} \quad t' = A x + B t,$$

onde  $a$ ,  $b$ ,  $A$  e  $B$  são constantes que dependem apenas de  $v$

# Transformações de Lorentz

O que ocorre com as distâncias  $y$  e  $z$ , perpendiculares ao movimento? Contraem? Esticam?

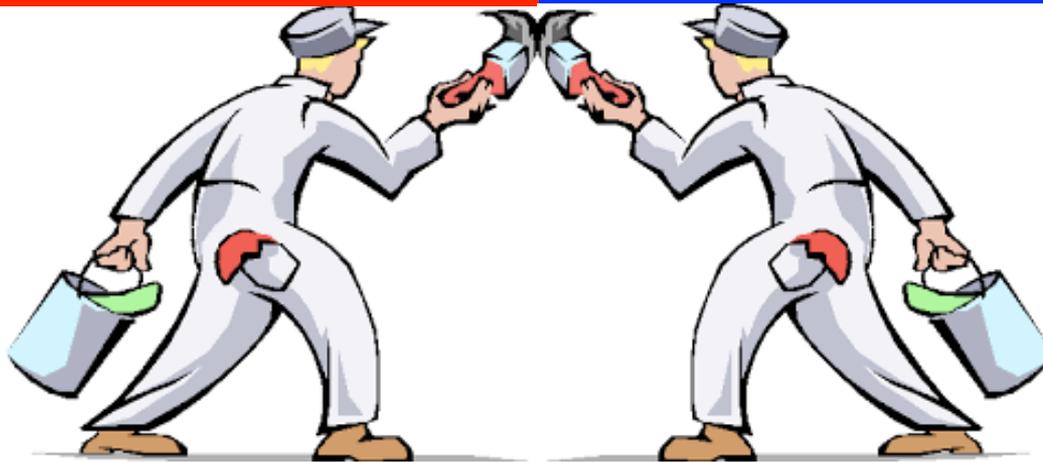
- A) Contraem menos que as na direção  $x$
- B) Contraem da mesma forma que as na direção  $x$
- C) Esticam
- D) Nada



# Transformações de Lorentz

O que ocorre com as distâncias  $y$  e  $z$ , perpendiculares ao movimento? Contraem? Esticam?

- A) Contraem menos que as na direção  $x$
- B) Contraem da mesma forma que as na direção  $x$
- C) Esticam
- D) Nada



# Transformações de Lorentz

De S para S'

$$x' = \gamma (x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma (t - vx / c^2)$$

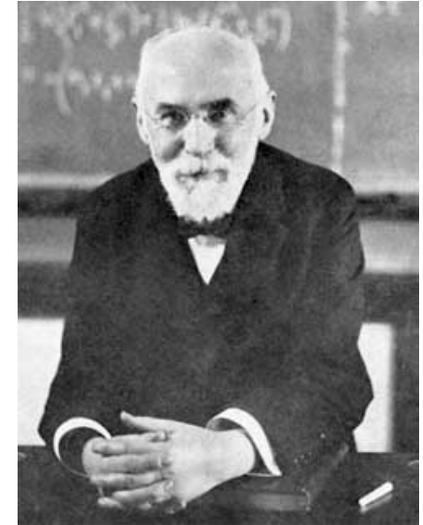
de S' para S

$$x = \gamma (x' + vt')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \gamma (t' + vx' / c^2)$$



**Hendrik  
Lorentz**

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Lembrete: aqui estamos assumindo a convenção de que o ponto (0,0,0,0) é o mesmo em ambos os referenciais (i.e., que os relógios de S e S' são iniciados no instante em que as origens dos dois referenciais coincidem.

# Transfs. de Lorentz: exemplo

De S para S'

$$x' = \gamma (x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma (t - vx / c^2)$$

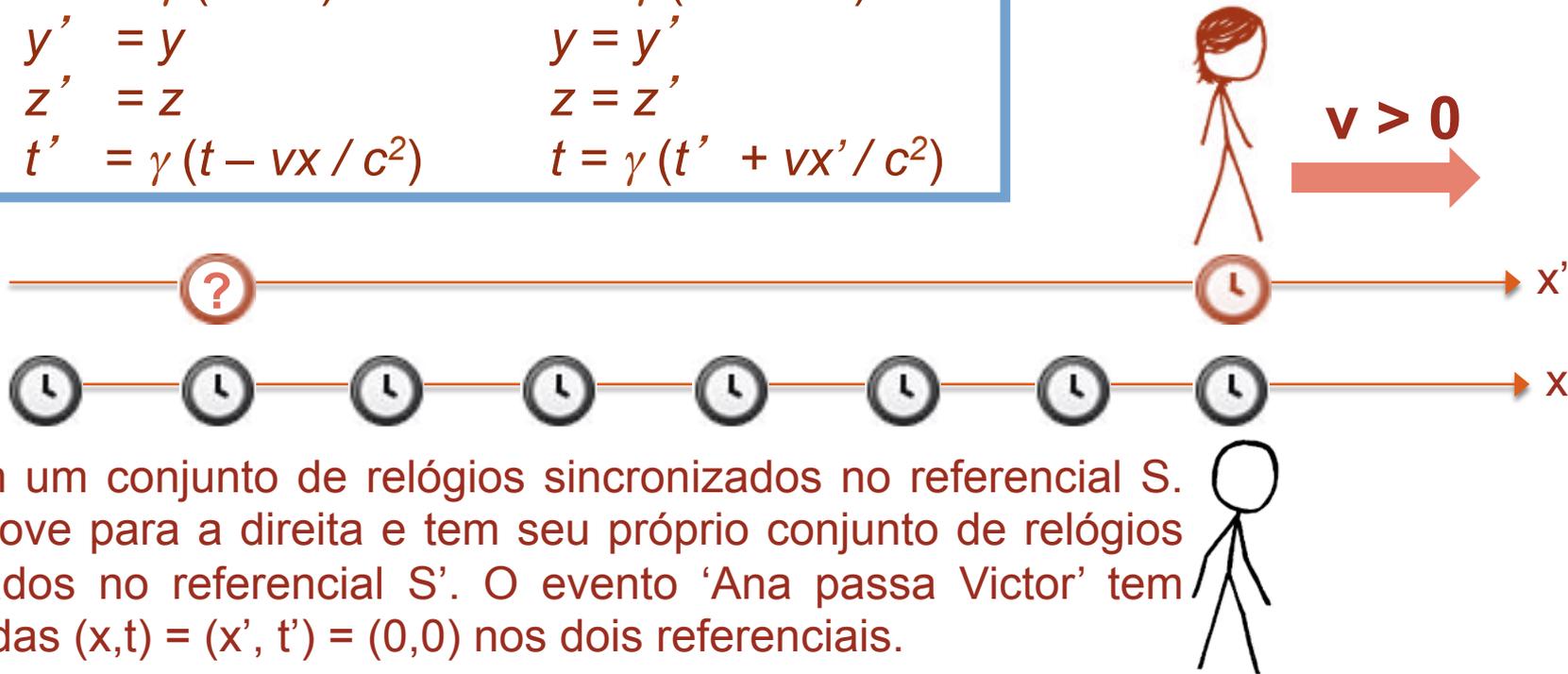
de S' para S

$$x = \gamma (x' + vt')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \gamma (t' + vx' / c^2)$$



Victor tem um conjunto de relógios sincronizados no referencial S. Ana se move para a direita e tem seu próprio conjunto de relógios sincronizados no referencial S'. O evento 'Ana passa Victor' tem coordenadas  $(x,t) = (x', t') = (0,0)$  nos dois referenciais.

Nesse mesmo instante, de acordo com Victor, o relógio de Ana marcado '?' indica um valor de tempo t'

- A) Ligeiramente negativo   **B) Ligeiramente positivo**   C) Igual a zero  
D) A resposta pode ser (A), (B) ou (C), dependendo do valor de v

# Transformações de Lorentz: 2 eventos

de S para S'

$$\Delta x' = \gamma (\Delta x - v \Delta t)$$

$$\Delta y' = \Delta y$$

$$\Delta z' = \Delta z$$

$$\Delta t' = \gamma (\Delta t - v \Delta x / c^2)$$

de S' para S

$$\Delta x = \gamma (\Delta x' + v \Delta t')$$

$$\Delta y = \Delta y'$$

$$\Delta z = \Delta z'$$

$$\Delta t = \gamma (\Delta t' + v \Delta x' / c^2)$$

## Casos particulares:

**Relatividade da Simultaneidade.** Se  $\Delta t' = 0$ :  $\Delta t = \gamma v \Delta x' / c^2$

[Se no Ref. S' 2 eventos ocorrem simultaneamente mas em pontos diferentes do espaço, não serão simultâneos no Ref. S]

**Dilatação temporal.** Se  $\Delta x' = 0$ :  $\Delta t = \gamma \Delta t'$

[Para 2 eventos no mesmo ponto do Ref. S', um relógio em S medirá um intervalo de tempo maior que um relógio em S']

**Contração espacial.** Se  $\Delta t = 0$ :  $\Delta x = \Delta x' / \gamma$

[Medindo simultaneamente no Ref. S a posição de dois objetos/eventos, encontramos uma distância menor que a medida no Ref. S']

# Transformação de Lorentz p/ velocidades

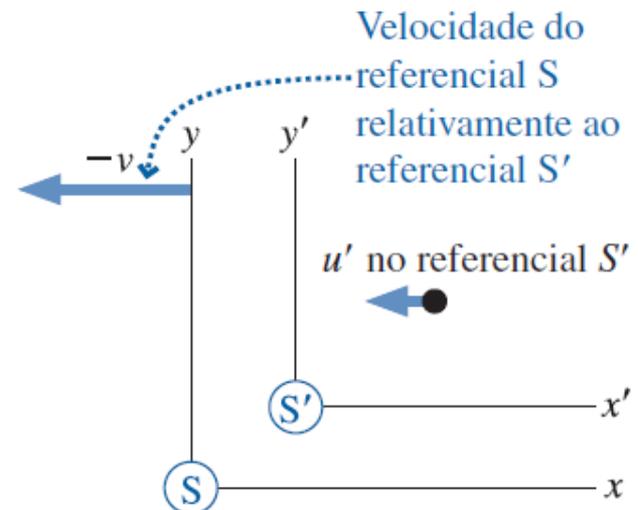
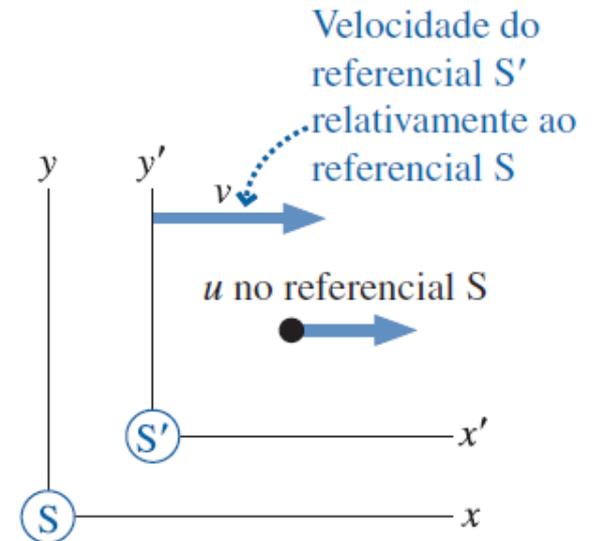
$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{d(\gamma(x' + vt'))}{d(\gamma(t' + vx'/c^2))}$$

$$= \frac{dx' + vdt'}{dt' + vdx'/c^2}$$

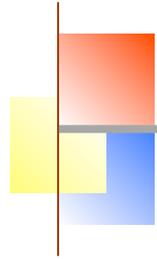
$$= \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

Reciprocamente:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$



# Transformação de Lorentz p/ velocidades

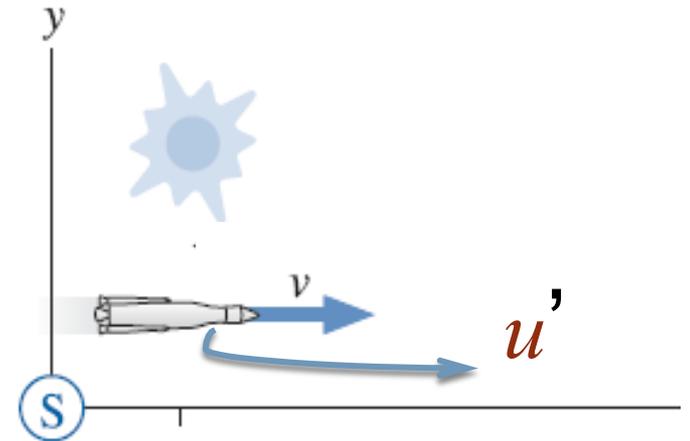


$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

Teste: se  $u' = c$ :  $u = c$  ✓ (p/qq v)

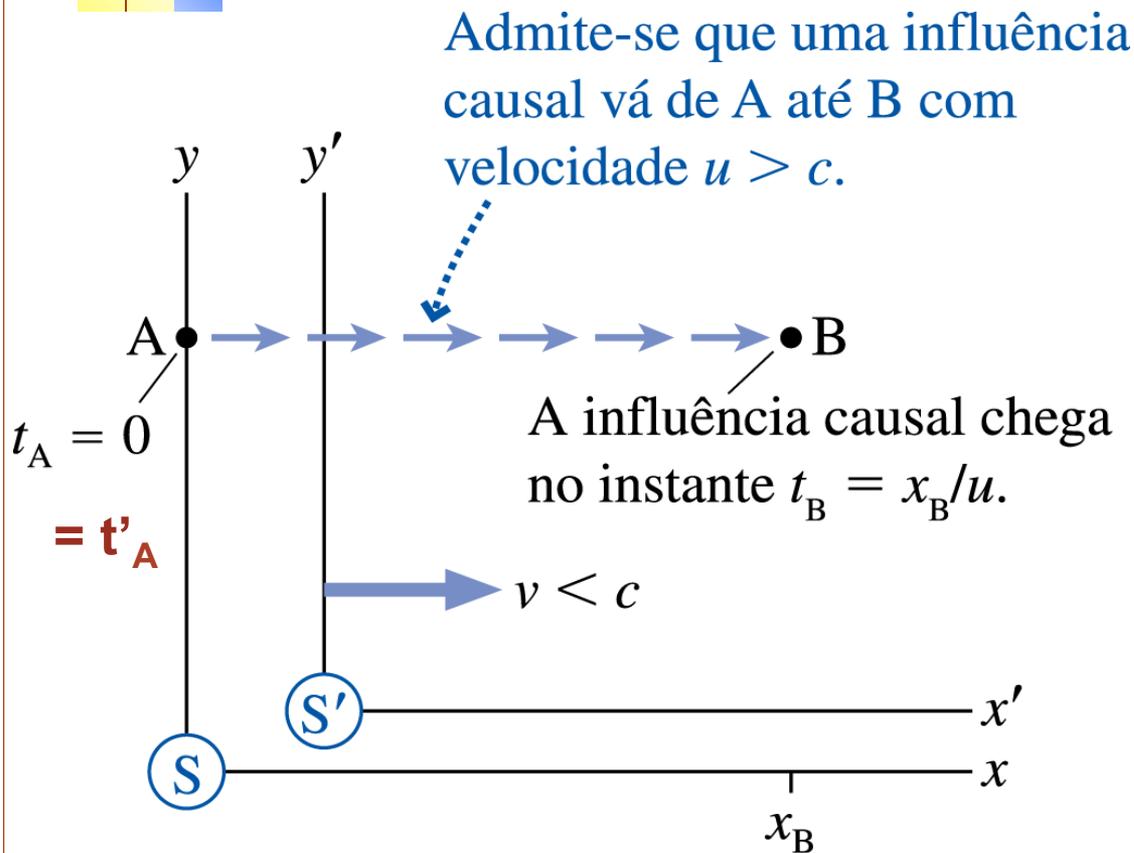
Alice está em um foguete andando com velocidade  $v = 0,5c$  com respeito a Victor. Ela dispara um míssil para a sua frente, com velocidade  $u' = 0,6c$  em relação ao foguete. Qual a velocidade do projétil em relação a Victor?

Resposta:  $u = 0,846c$



Desafio: prove que se  $u' \leq c$  e  $v \leq c$  então  $u \leq c$

# Pode algo andar mais rápido que a luz?



**P: Se  $v > (c/u) \cdot c$ , então o instante  $t'_B$  (com relação ao ref. S') satisfaz**

**A)  $t'_B > t_B$**

**B)  $t'_B = t_B$**

**C)  $t_B > t'_B > 0$**

**D)  $t_B > 0 > t'_B$**

# Pode algo andar mais rápido que a luz?

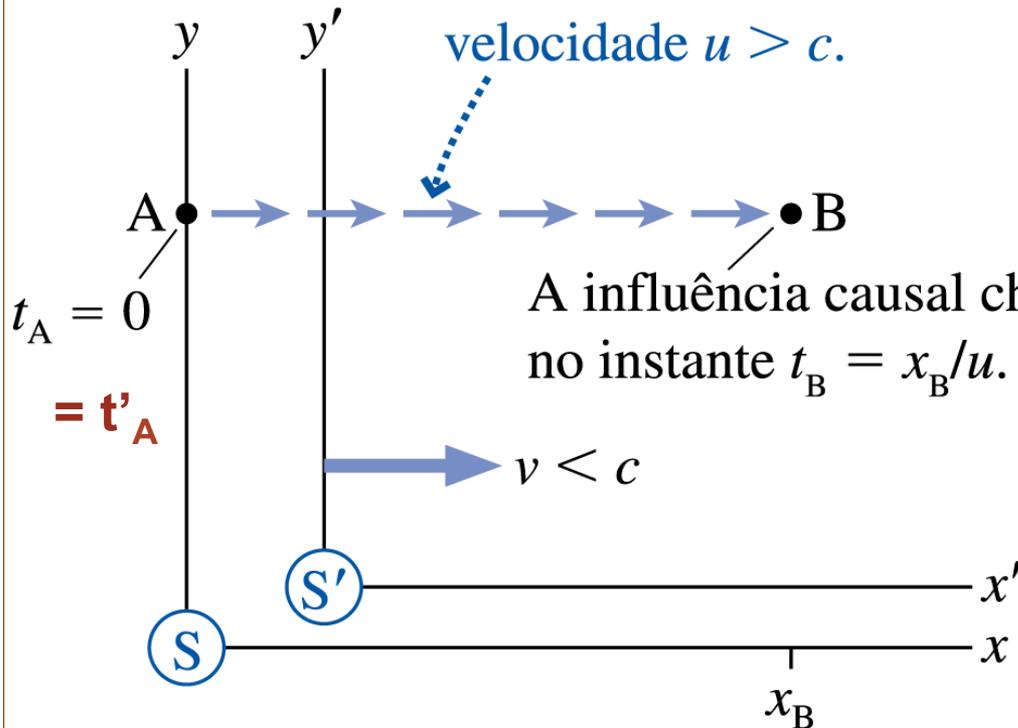
Admite-se que uma influência causal vá de A até B com velocidade  $u > c$ .

Visto do ref.  $S'$ :

$$t'_A = \gamma \left( t_A - \frac{v}{c^2} x_A \right) = 0$$

$$t'_B = \gamma \left( t_B - \frac{v}{c^2} x_B \right) \\ = \gamma t_B \left( 1 - \frac{vu}{c^2} \right)$$

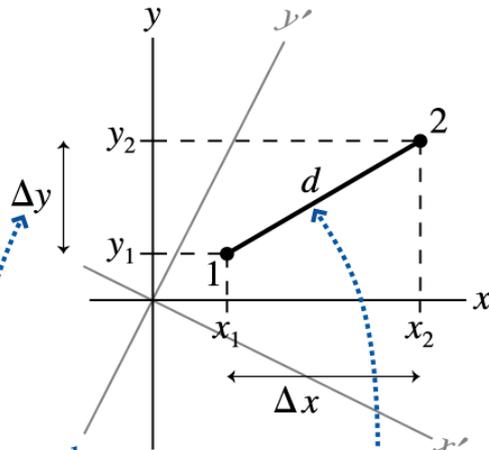
Se  $v > (c/u).c$  :  $t'_B < 0!!$



Se algo pudesse andar mais rápido que a luz, alguns observadores veriam **efeitos acontecerem antes das suas causas**, como num filme rodando ao contrário – absurdo!

# O Intervalo entre 2 eventos

Medições feitas no sistema  $xy$

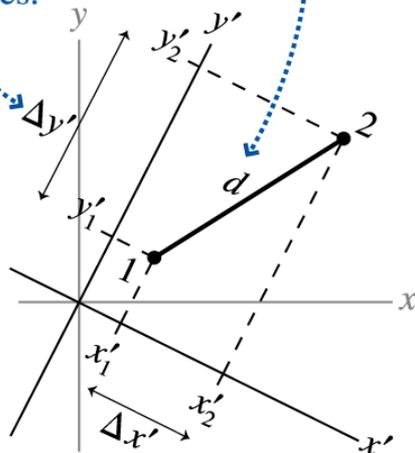


Os valores das coordenadas e dos intervalos são diferentes.

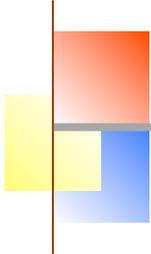
A distância  $d$  é a mesma.

Na geometria usual, a **distância espacial** entre 2 pontos não depende da escolha da orientação dos eixos  $x$  e  $y$

$$\begin{aligned}d^2 &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \\ &= (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2\end{aligned}$$



Medições feitas no sistema  $x'y'$



# O Intervalo entre 2 eventos

Em relatividade: o *intervalo espaço-temporal* entre dois eventos:

$$s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

é independente do referencial inercial usado para medir  $x$  e  $t$

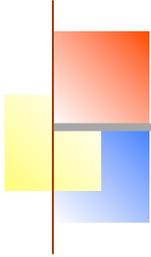
2 eventos

$$E1: (x_1, t_1) \text{ ou } (x'_1, t'_1) \quad = \gamma^2 [c^2(\Delta t' + v\Delta x'/c^2)^2 - (\Delta x' + v\Delta t')^2]$$

$$E2: (x_2, t_2) \text{ ou } (x'_2, t'_2) \quad = \cancel{\gamma^2} [c^2(\Delta t')^2(1 - \cancel{v^2/c^2}) + (\Delta x')^2(\cancel{v^2/c^2} - 1) \\ + \cancel{2v\Delta x'\Delta t'} - \cancel{2v\Delta x'\Delta t'}]$$

$$\Delta x = (x_2 - x_1); \quad \Delta t = (t_2 - t_1)$$

$$= c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2$$



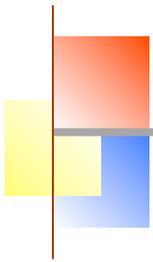
# O Intervalo entre 2 eventos

---

Obs1: mais geralmente:  $s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$

Obs2: Como 'usar' o intervalo espaço-temporal:

Se sabemos  $\Delta x$  e  $\Delta t$  entre 2 eventos no ref. S, e também (p. ex.)  $\Delta t'$  no ref. S', podemos facilmente obter  $|\Delta x'|$ , sem ter de usar todo o 'poderio' das transformações de Lorentz...



# O Intervalo entre 2 eventos

$$s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

**Considere os seguintes pares de eventos:**

- A) A1: Victor dispara um raio laser; A2: O raio atinge Ana
- B) B1: o relógio de Peggy marca 13h; B2: o relógio de Peggy marca 14h
- C) C1: Uma bomba explode 100m à esquerda de Ryan;  
C2: Simultaneamente (no ref. de Ryan) outra bomba explode 100m à sua direita

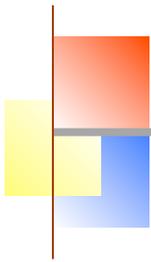
**P: Esses pares de eventos satisfazem**

**A)  $s^2_A > 0$ ,  $s^2_B = 0$ ,  $s^2_C < 0$**

**C)  $s^2_A = 0$ ,  $s^2_B < 0$ ,  $s^2_C > 0$**

**B)  $s^2_A = 0$ ,  $s^2_B > 0$ ,  $s^2_C < 0$**

**D)  $s^2_A < 0$ ,  $s^2_B > 0$ ,  $s^2_C = 0$**



# O Intervalo entre 2 eventos

$$s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

**Considere os seguintes pares de eventos:**

- A) A1: Victor dispara um raio laser; A2: O raio atinge Ana
- B) B1: o relógio de Peggy marca 13h; B2: o relógio de Peggy marca 14h
- C) C1: Uma bomba explode 100m à esquerda de Ryan;  
C2: Simultaneamente (no ref. de Ryan) outra bomba explode 100m à sua direita

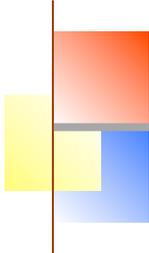
**P: Esses pares de eventos satisfazem**

**A)  $s^2_A > 0$ ,  $s^2_B = 0$ ,  $s^2_C < 0$**

**C)  $s^2_A = 0$ ,  $s^2_B < 0$ ,  $s^2_C > 0$**

**B)  $s^2_A = 0$ ,  $s^2_B > 0$ ,  $s^2_C < 0$**

**D)  $s^2_A < 0$ ,  $s^2_B > 0$ ,  $s^2_C = 0$**



# O Intervalo entre 2 eventos

---

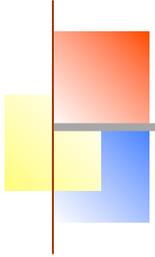
$$s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

O intervalo entre 2 eventos pode ser de 3 tipos distintos

## 1. $s^2 > 0$ : intervalo 'tipo tempo'.

**Ex:** intervalo entre dois 'tiques' de um mesmo relógio.

- Nesse caso é possível que um dos eventos afete o outro, através de alguma influência causal que se propaga com  $u = \Delta x / \Delta t < c$ .
- Todos os observadores inerciais concordam quanto à ordem temporal desses eventos.



# O Intervalo entre 2 eventos

---

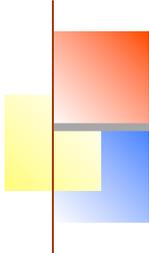
$$s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

O intervalo entre 2 eventos pode ser de 3 tipos distintos

## 2. $s^2 = 0$ : intervalo 'nulo' ou 'tipo luz'.

**Ex: intervalo entre a emissão e detecção de um raio de luz se propagando em linha reta.**

- Nesse caso é possível que um dos eventos afete o outro, mas apenas através de uma influência que se propaga com  $u = \Delta x / \Delta t = c$ .
- Todos os observadores inerciais concordam quanto à ordem temporal desses eventos.



# O Intervalo entre 2 eventos

---

$$s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

O intervalo entre 2 eventos pode ser de 3 tipos distintos

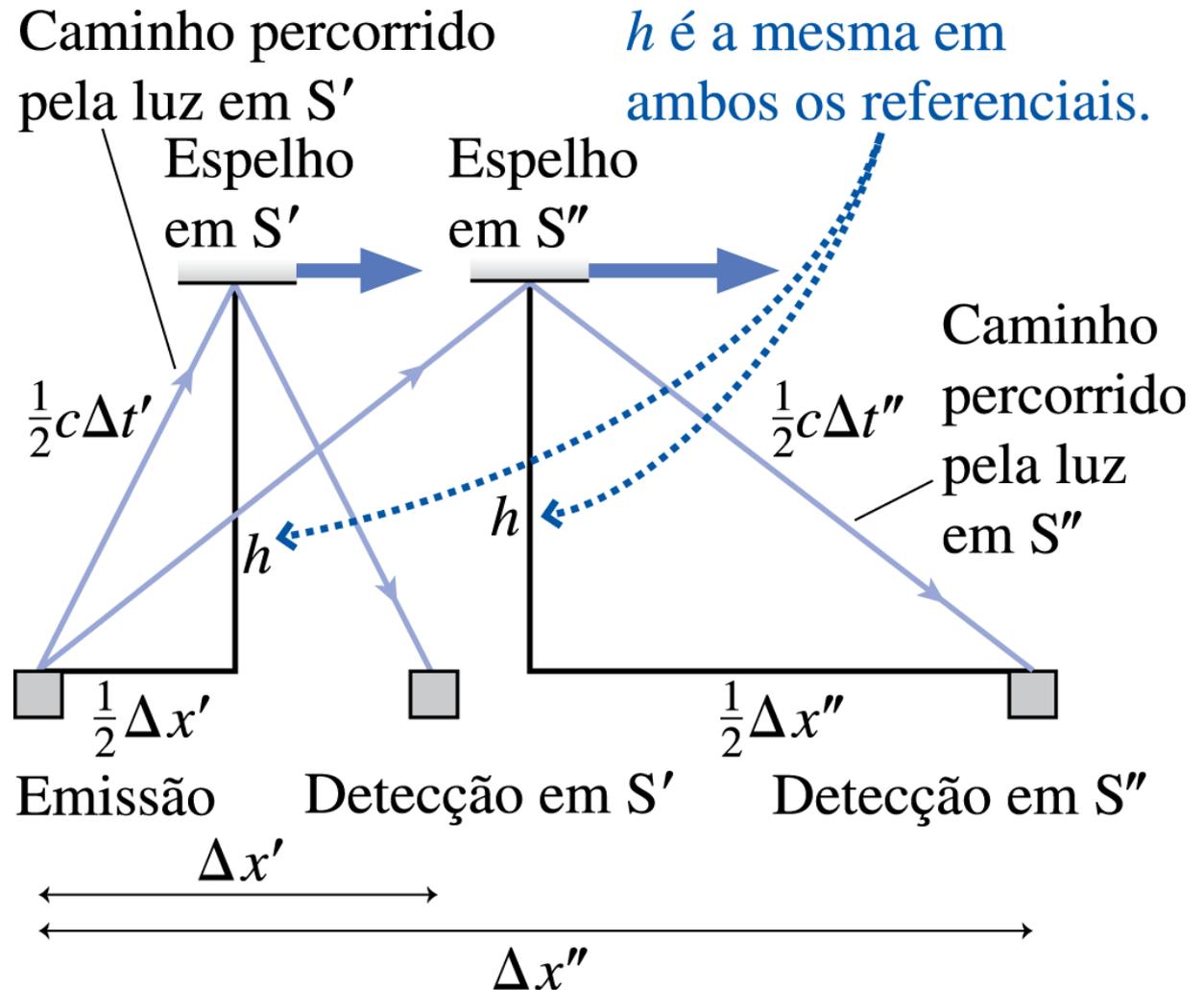
### 3. $s^2 < 0$ : intervalo 'tipo espaço'.

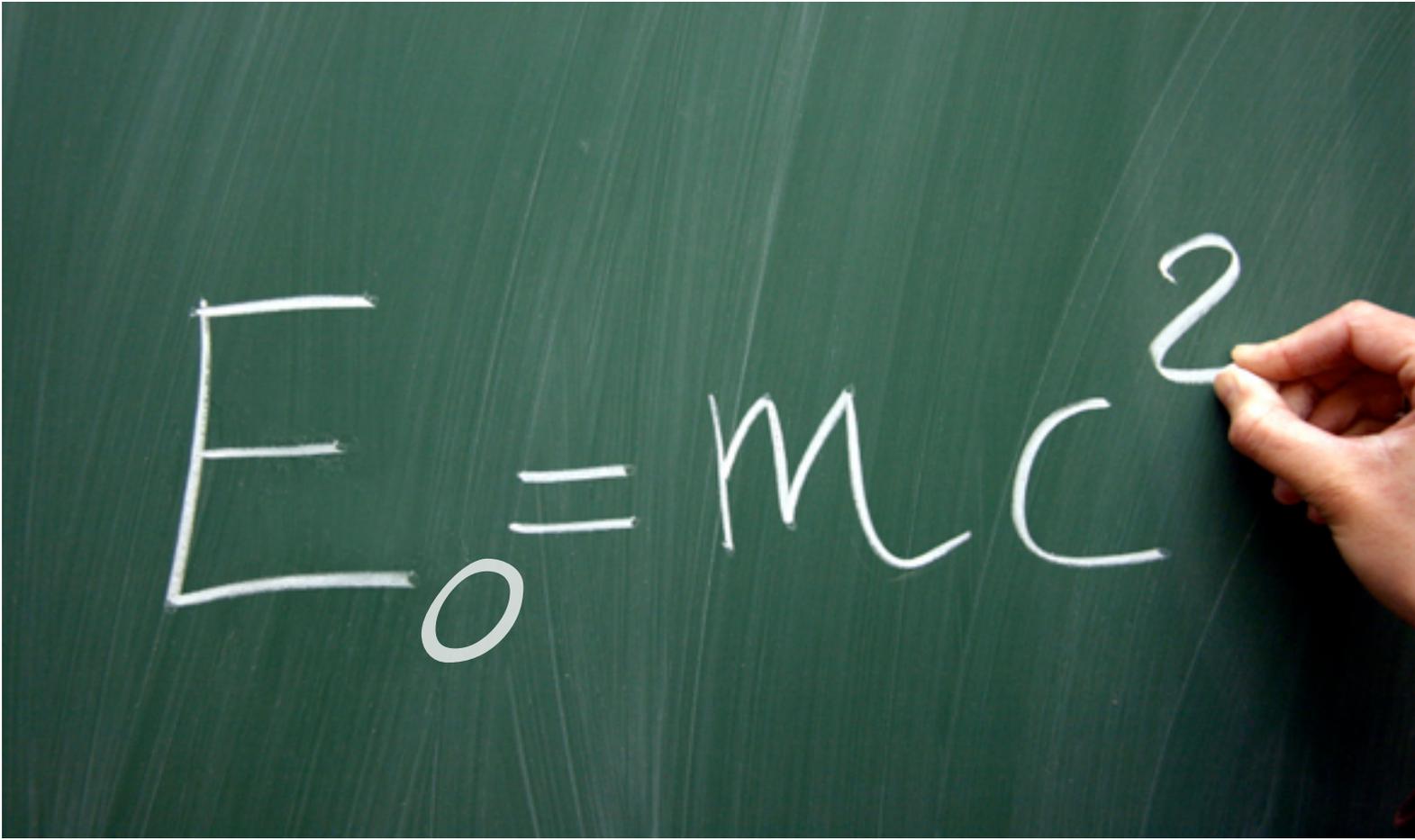
**Ex:** intervalo entre duas bombas explodindo simultaneamente em posições diferentes de um dado referencial.

- Nesse caso não é possível que um dos eventos afete o outro, por qualquer influência que se propague com  $u = \Delta x / \Delta t \leq c$ .
- Observadores inerciais distintos podem discordar quanto à ordem temporal desses eventos.

# Interpretação Geométrica do Intervalo entre 2 eventos

E1: Luz é emitida  
E2: Luz é detectada

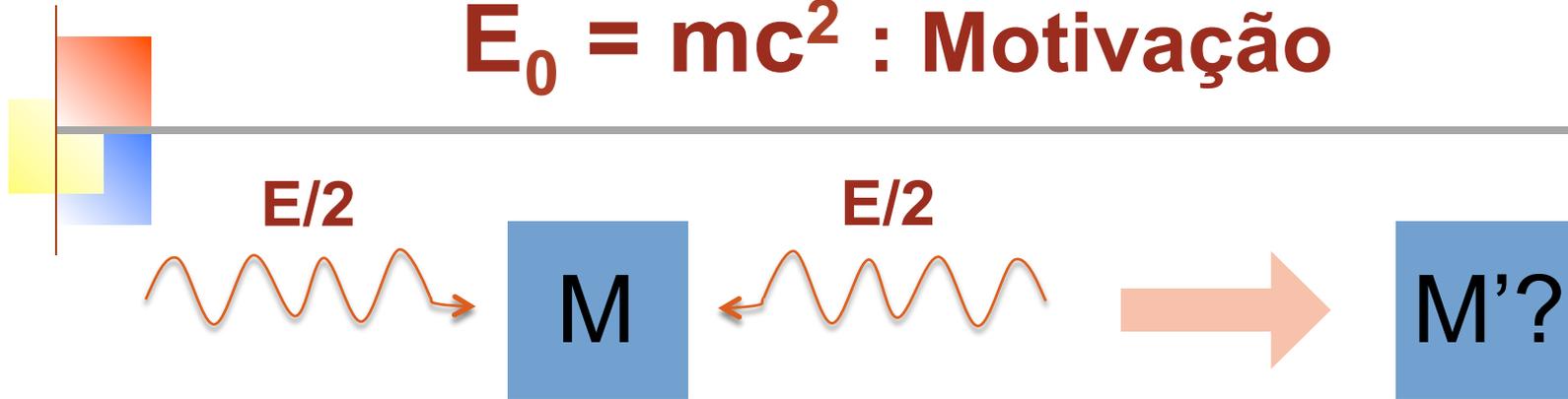


A hand is shown writing the equation  $E_0 = mc^2$  on a dark green chalkboard. The equation is written in white chalk. The hand is positioned on the right side of the frame, with fingers holding the end of the chalk stroke for the number 2.
$$E_0 = mc^2$$

# $E_0 = mc^2$ : Motivação (Einstein 1946)



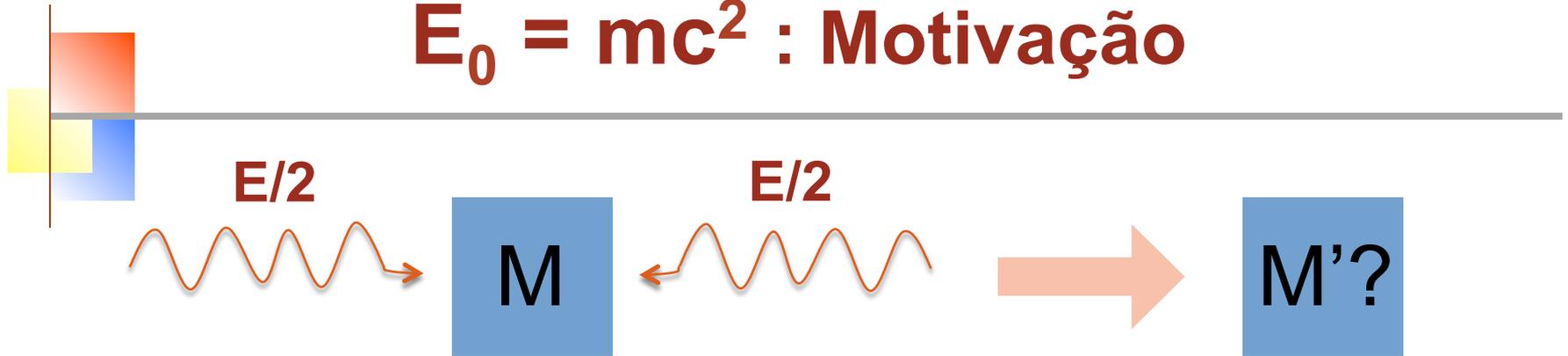
# $E_0 = mc^2$ : Motivação



Um bloco de massa  $M$  absorve dois raios de luz infravermelha que propagam em sentidos opostos. A massa  $M'$  do bloco após a absorção é

- A) Igual a  $M$
- B) Maior que  $M$
- C) Menor que  $M$

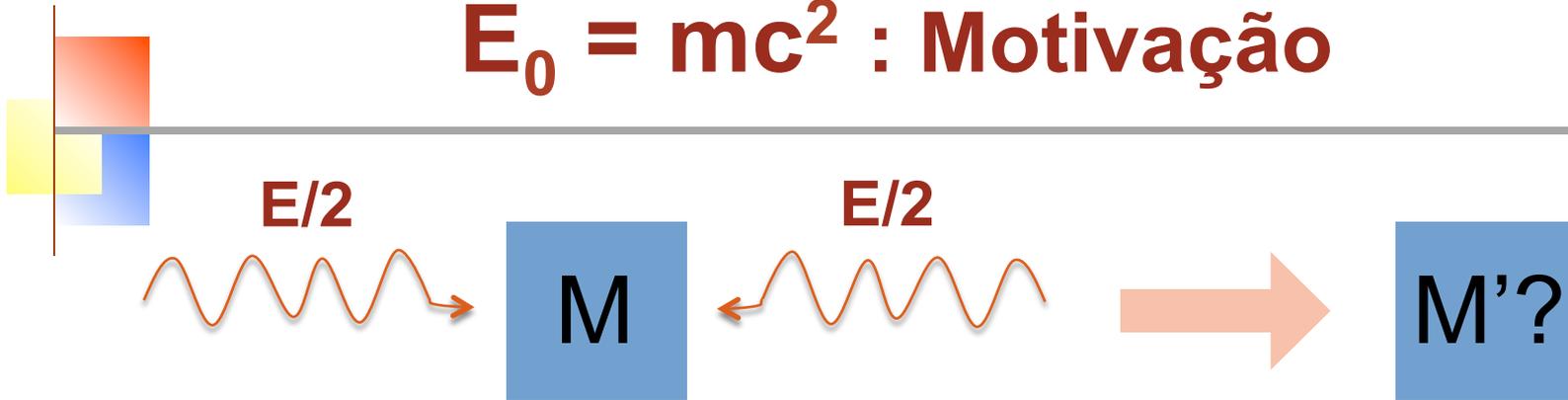
# $E_0 = mc^2$ : Motivação



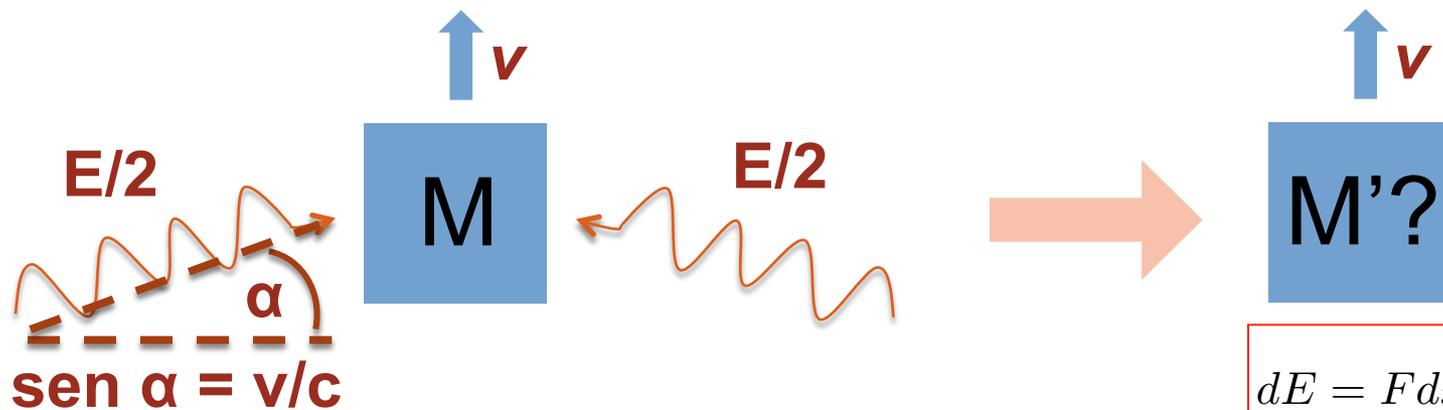
Um bloco de massa  $M$  absorve dois raios de luz infravermelha que propagam em sentidos opostos. A massa  $M'$  do bloco após a absorção é

- A) Igual a  $M$
- B) Maior que  $M$
- C) Menor que  $M$

# $E_0 = mc^2$ : Motivação



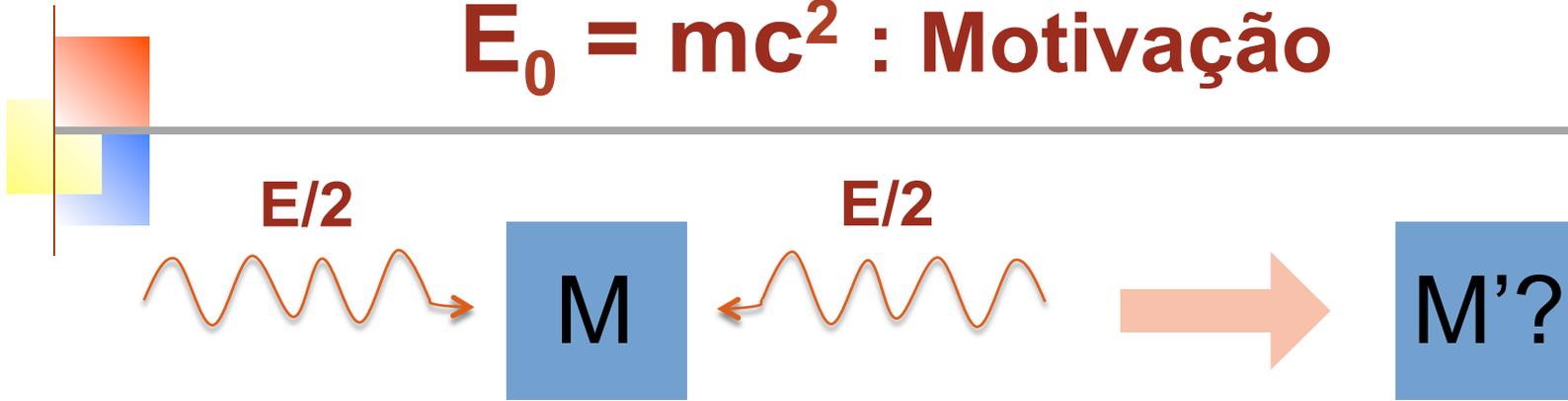
Em um referencial se movendo para baixo com velocidade  $v \ll c$



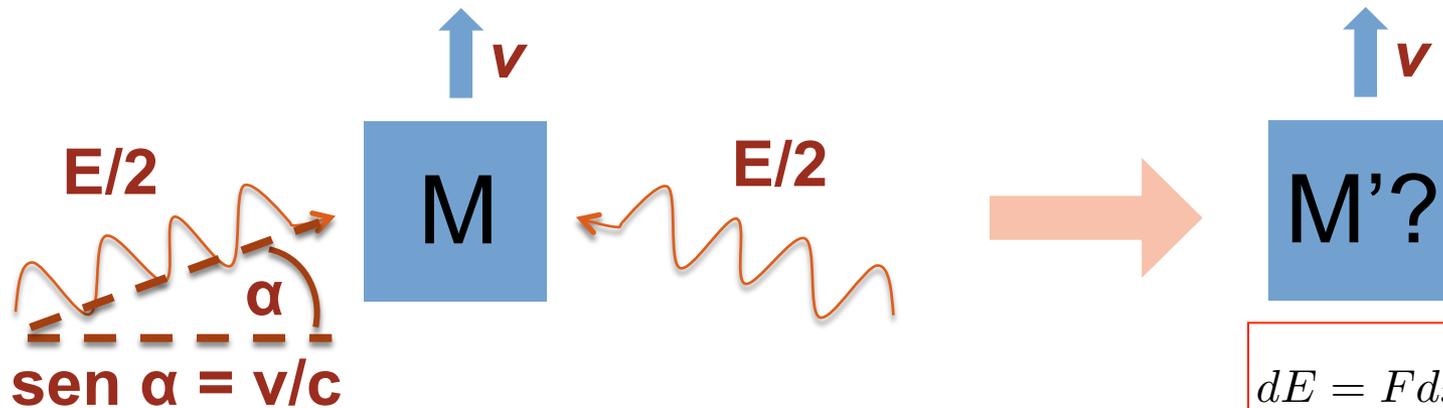
Cons. momento na dir.  $y$ :  $M'v = Mv + 2$  (mom.  $y$  da luz)!

$$\begin{aligned} dE &= F dx = \frac{dp}{dt} dx \\ &= \frac{dx}{dt} dp \\ &= u dp \end{aligned}$$

# $E_0 = mc^2$ : Motivação



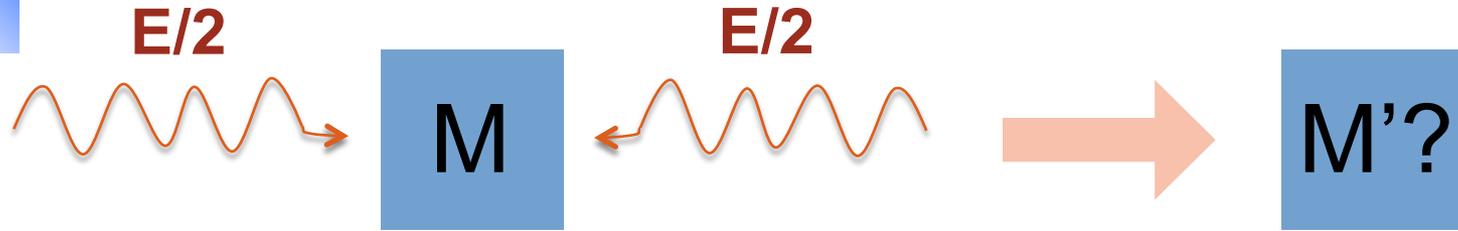
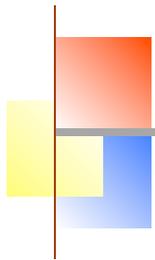
Em um referencial se movendo para baixo com velocidade  $v \ll c$



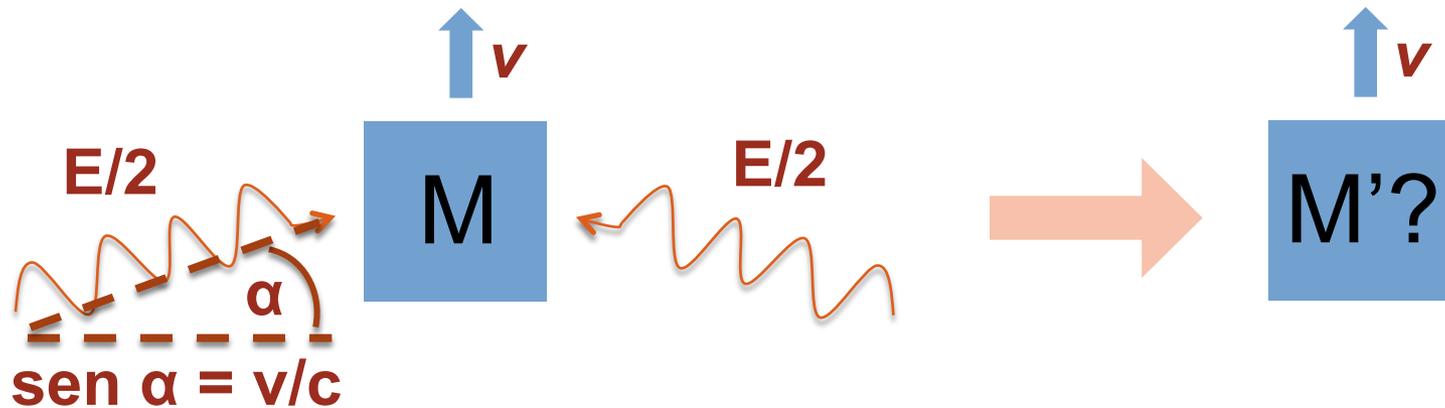
Cons. momento na dir.  $y$ :  $M'v = Mv + 2 \left[ \underbrace{(E/2c) \text{ sen } \alpha}_{\text{momento linear da luz!}} \right]$

$$\begin{aligned} dE &= F dx = \frac{dp}{dt} dx \\ &= \frac{dx}{dt} dp \\ &= u dp \end{aligned}$$

# $E_0 = mc^2$ : Motivação



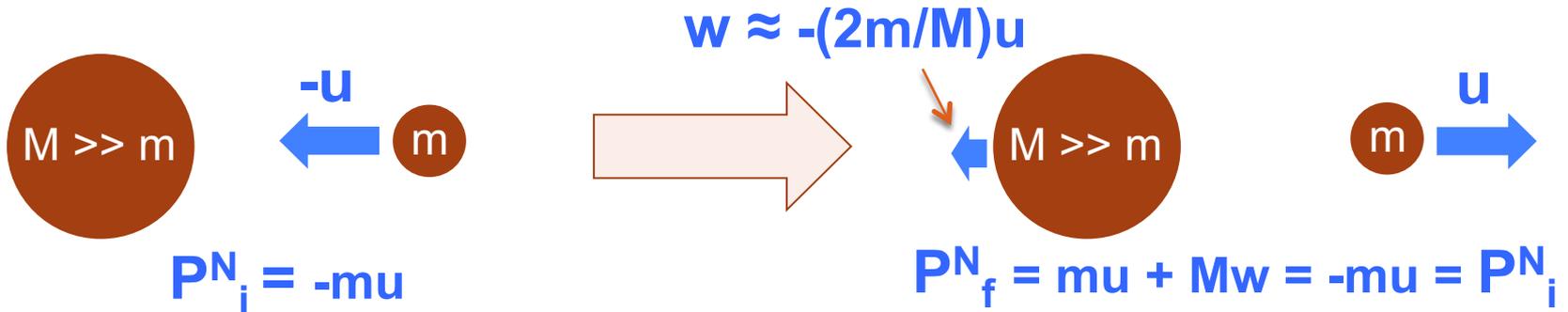
Em um referencial se movendo para baixo com velocidade  $v \ll c$



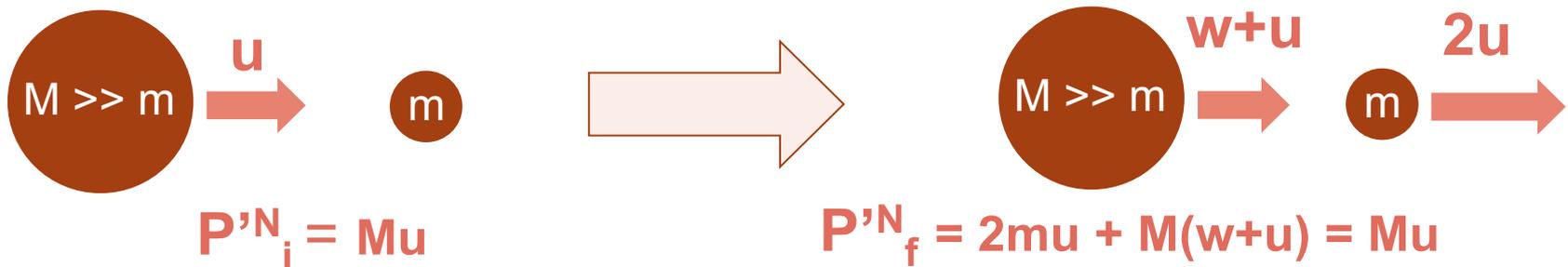
Cons. momento na dir.  $y$ :  $M'v = Mv + E/c$

$$E = (M' - M)c^2 !$$

# Choque de bolas leve e pesada: análise Newtoniana

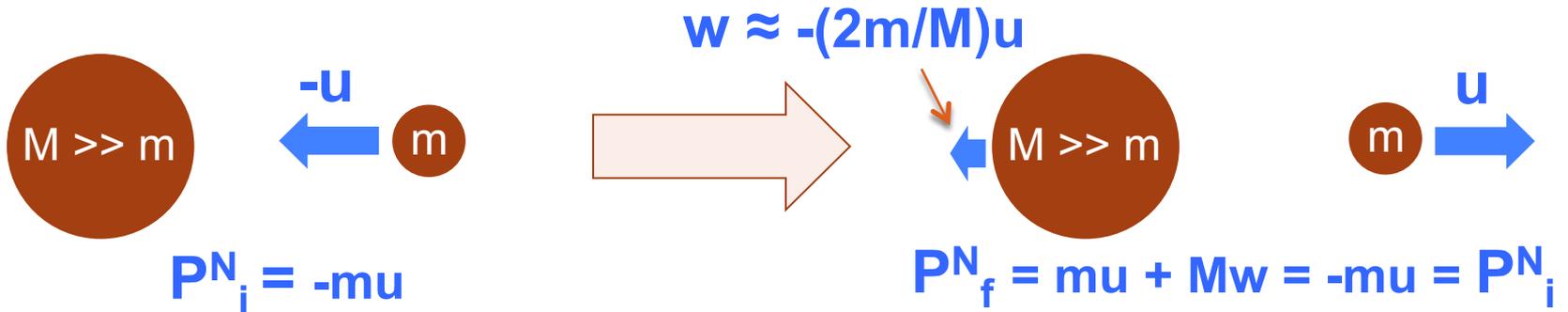


Mesma situação vista de um ref.  $S'$  se movendo com  $v = -u$   
de acordo com Transformações de Galileu

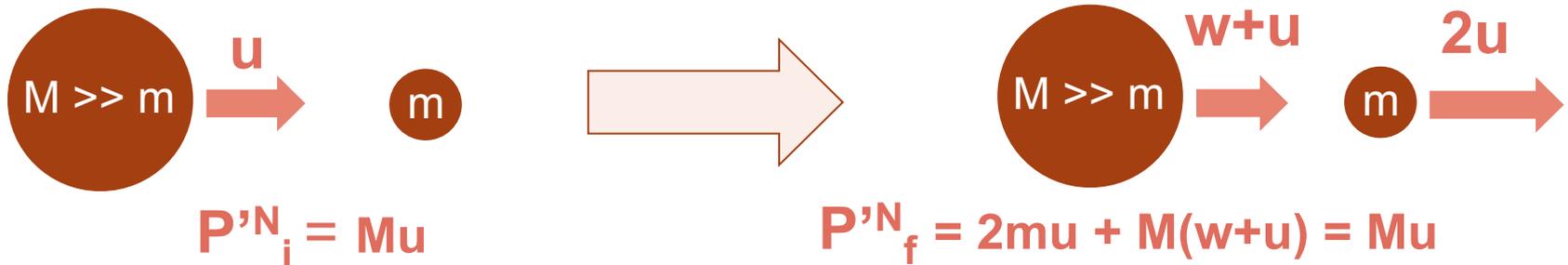


Se as transformações de Galileu estivessem corretas,  $P^N$  se conservaria em todos os referenciais inerciais

# Choque de bolas leve e pesada: análise Newtoniana

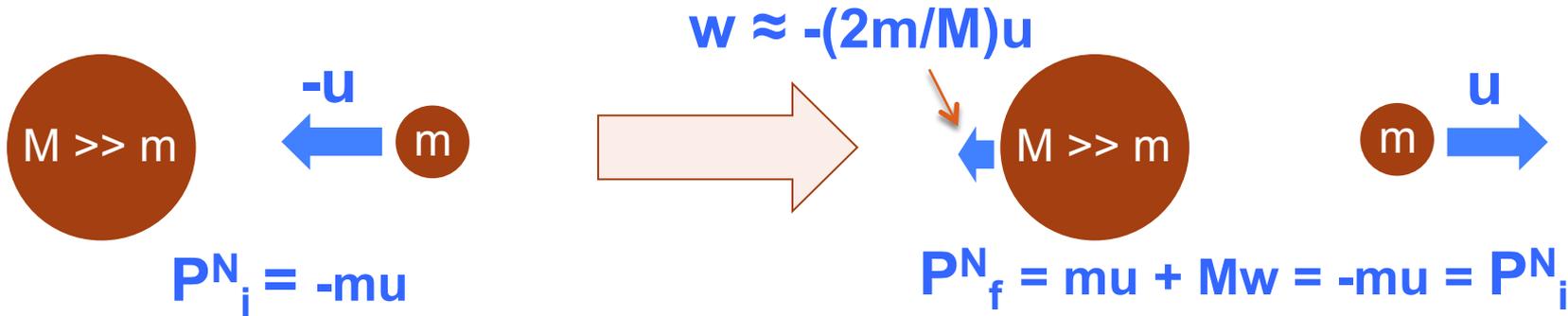


Mesma situação vista de um ref.  $S'$  se movendo com  $v = -u$   
 de acordo com Transformações de Galileu



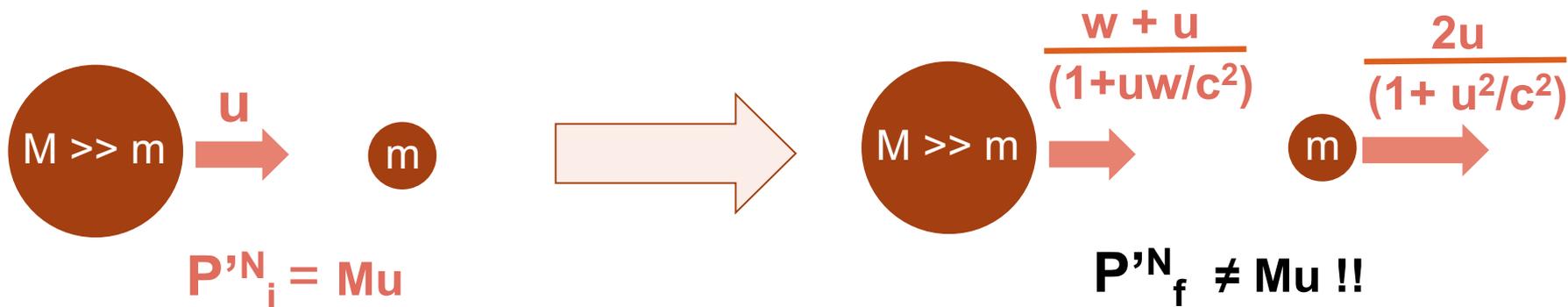
Se as transformações de Galileu estivessem corretas,  $P^N$  se conservaria em todos os referenciais inerciais

# Choque de bolas leve e pesada: análise **Relativística**



Mesma situação vista de um ref.  $S'$  se movendo com  $v = -u$  de acordo com Transformações de Lorentz:

$$vel' = \frac{vel - v}{1 - \frac{vel \cdot v}{c^2}}$$



Se  $u$  é comparável a  $c$ ,  $P^N$  **NÃO** é nem de longe conservado no ref.  $S'$ !

# Energia e Momento linear Newtonianos

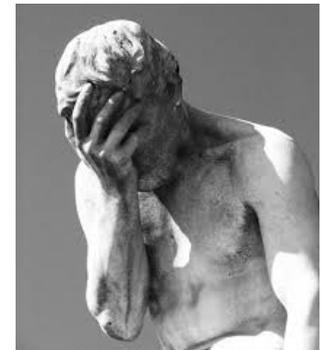
**Moral: mesmo que  $P^N$  seja conservado em um ref. inercial, em geral NÃO será conservado em outros refs. inerciais!**

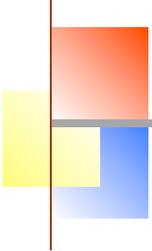
**Mas então, pelo princípio da relatividade, a conservação de  $P^N$  Newtoniano NÃO é uma lei da física !!?**

**2 opções possíveis**

**a) Desistir de usar lei de conservação para momento**

**b) Procurar uma nova expressão relativística para o momento que seja conservada em todos os referenciais inerciais**





# Momento linear relativístico

Solução (vide Moisés vol 4 p/ uma demonstração parcial)

Redefinir  $P$ , tomando a derivada temporal em relação ao ***tempo próprio  $\tau$  da partícula***

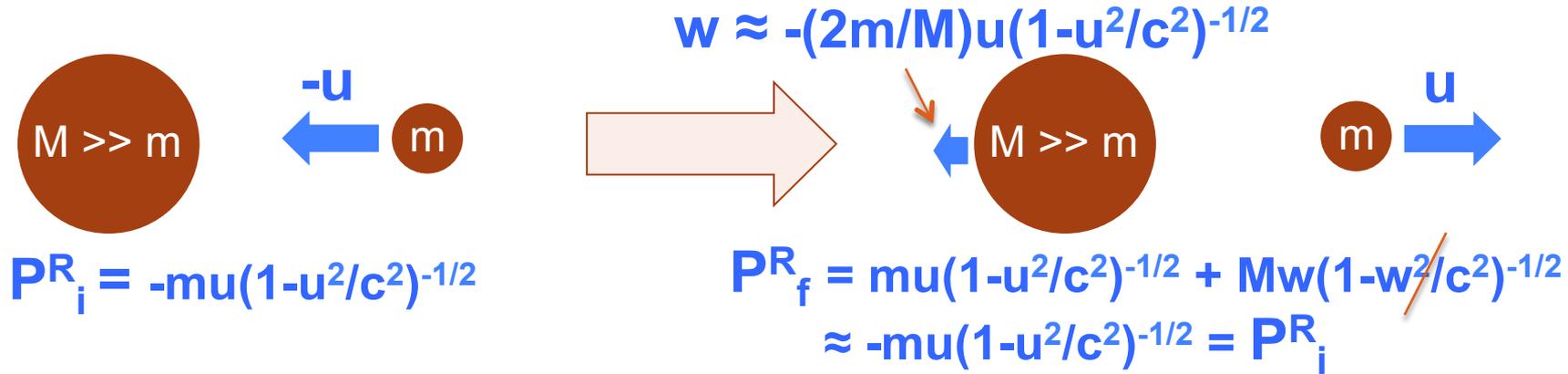
$$P_{Relativistico} = m \frac{dx}{d\tau} = m \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma_p P_{Newtoniano}$$

onde 
$$\gamma_p = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

**Obs 1:  $\gamma_p \neq \gamma$  !** ( $u$  é a velocidade da partícula, não do referencial  $S'$  )

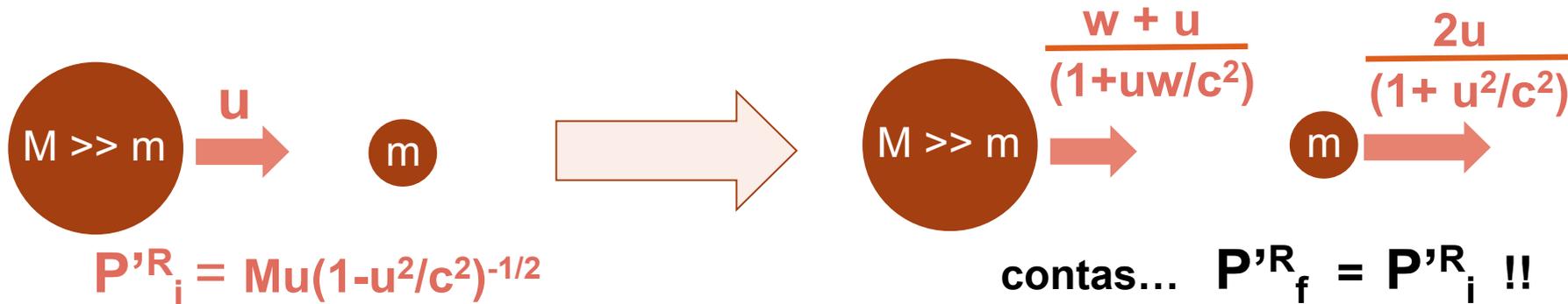
**Obs 2:** quando  $u \ll c$  ,  $P_{Relativistico} \longrightarrow P_{Newtoniano}$

# Choque de bolas leve e pesada: análise **Relativística**



Mesma situação vista de um ref.  $S'$  se movendo com  $v = -u$  de acordo com Transformações de Lorentz:

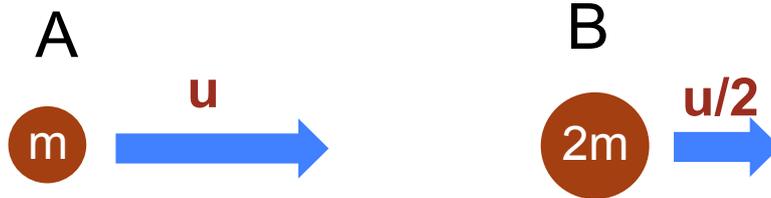
$$vel' = \frac{vel - v}{1 - \frac{vel \cdot v}{c^2}}$$



$\mathbf{P}^R$  é conservado tanto no ref S como no ref.  $S'$ !

# Momento linear relativístico

$$P_{relat} = \gamma_p mu$$



A partícula A tem metade da massa mas o dobro da velocidade da partícula B. Os momentos lineares relativísticos das duas partículas satisfazem:

- a)  $p_A > p_B$
- b)  $p_A = p_B$
- c)  $p_A < p_B$
- d) depende de  $u$

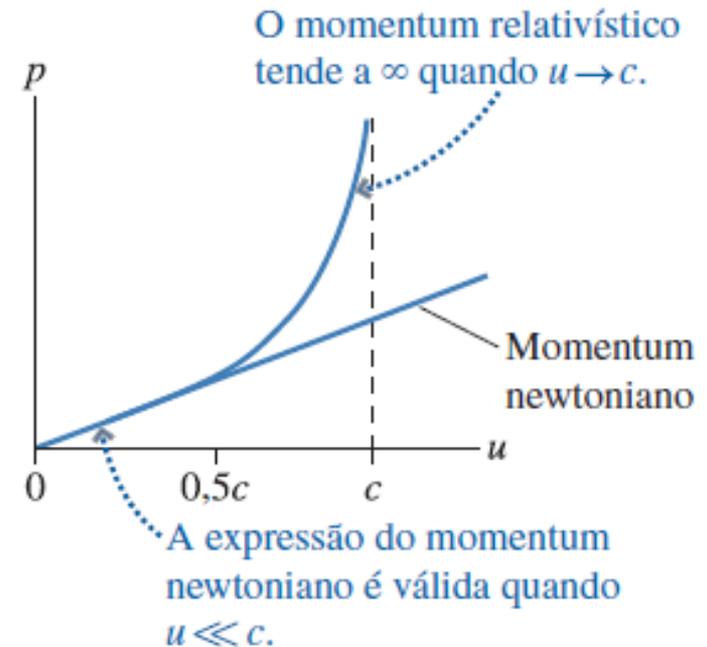
$\gamma_p$  é maior para a partícula mais rápida!

# Momento linear relativístico vs clássico


$$P_{relat} = \gamma_p m u$$

Um elétron tem massa  $m \approx 9 \cdot 10^{-31} \text{kg}$ . A tabela abaixo compara os momentos clássico (Newtoniano) e Relativístico para um elétron em várias velocidades (unidade:  $10^{-22} \text{kg} \cdot \text{m/s}$ ):

u	$p = m \cdot u$ clássico	$p = \gamma_p m \cdot u$ relativístico	diferença [%]
0.1c	0.273	0.276	1.1
0.5c	1.36	1.57	15.4
0.9c	2.46	5.63	128.9
0.99c	2.7	19.2	611.1



# Partícula submetida a força constante

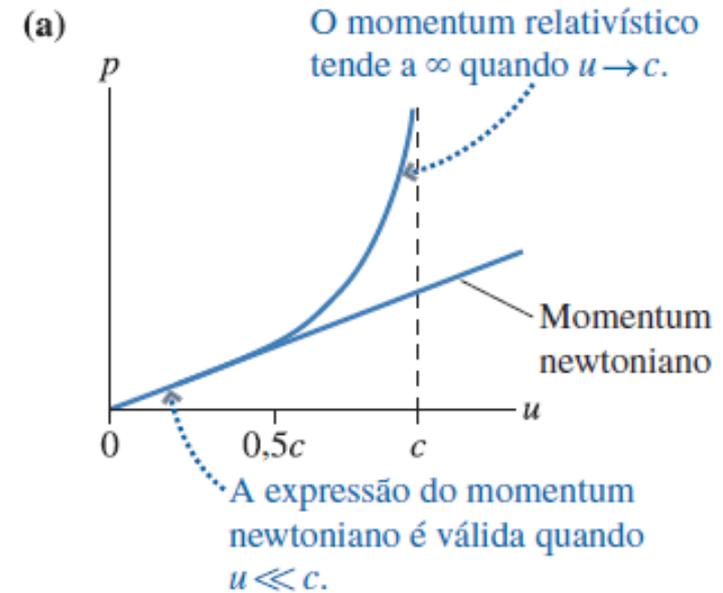
$$P_{Newtoniano} = mu = m \frac{dx}{dt}$$

$$P_{Relativistico} = \frac{mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma_p mu$$

Def: **Força (relativística):**  $F = dP_{relat} / dt$

**P:** Como se comporta, em função do tempo  $t$ , a aceleração  $a = du/dt$  de uma partícula que sofre uma força  $F$  **constante**?

- É constante, pois  $F = ma$ .
- Cai com  $t$ , tendendo a zero.
- Aumenta com  $t$ , tendendo a infinito.
- Primeiro aumenta e depois cai com  $t$ .



# Partícula submetida a força constante

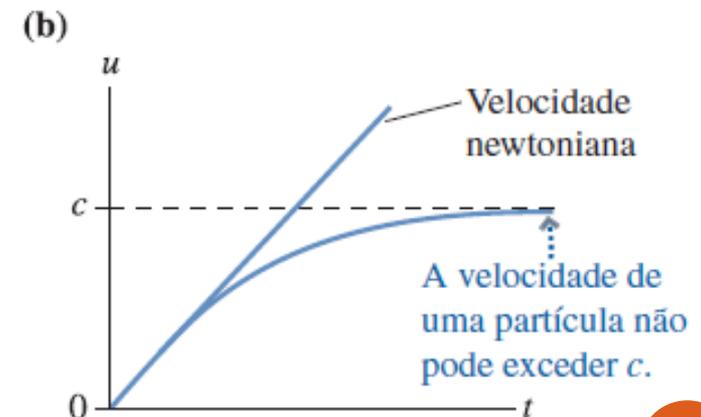
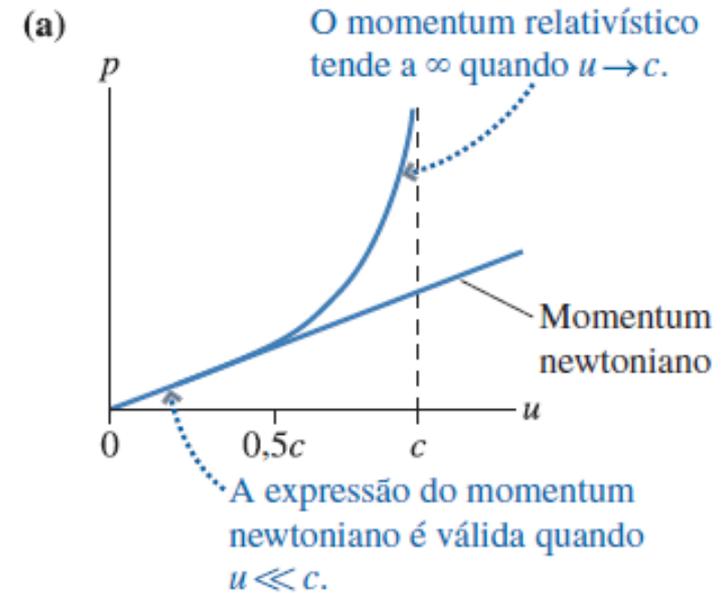
$$P_{Newtoniano} = mu = m \frac{dx}{dt}$$

$$P_{Relativistico} = \frac{mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma_p mu$$

Def: **Força (relativística):**  $F = dP_{relat} / dt$

**P:** Como se comporta, em função do tempo  $t$ , a aceleração  $a = du/dt$  de uma partícula que sofre uma força  $F$  **constante**?

- É constante, pois  $F = ma$ .
- Cai com  $t$ , tendendo a zero.
- Aumenta com  $t$ , tendendo a infinito.
- Primeiro aumenta e depois cai com  $t$ .



# Partícula submetida a força constante

$$P_{Newtoniano} = mu = m \frac{dx}{dt}$$

$$P_{Relativistico} = \frac{mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma_p mu$$

Def: **Força (relativística):**  $F = dP_{relat} / dt$

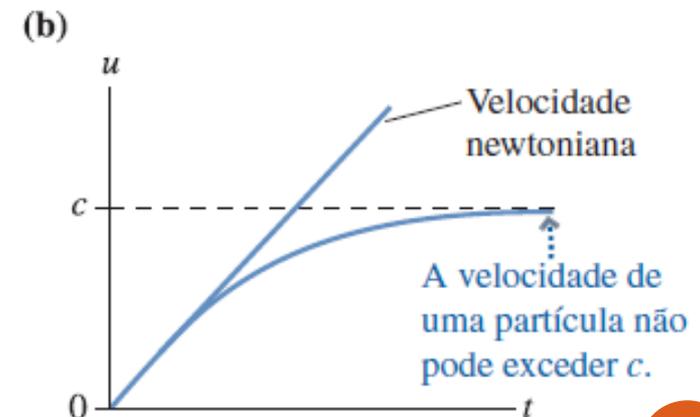
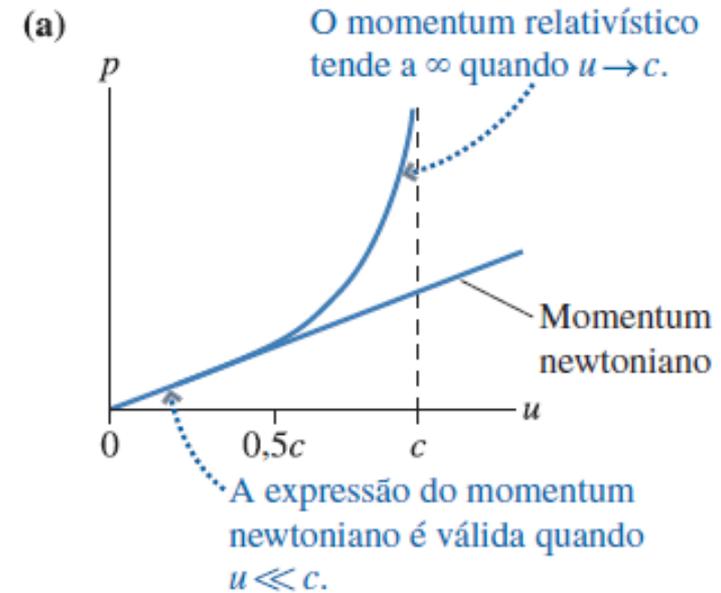
**P:** Como se comporta, em função do tempo  $t$ , a aceleração  $a = du/dt$  de uma partícula que sofre uma força  $F$  **constante**?

a) É constante, pois  $F = ma$ .

**b) Cai com  $t$ , tendendo a zero.  $F \neq ma!$**

c) Aumenta com  $t$ , tendendo a infinito.

d) Primeiro aumenta e depois cai com  $t$ .



# Partícula submetida a força constante

Dedução: considere uma partícula de massa  $m$ , inicialmente parada em  $x = 0, t = 0$ , a qual sofre uma força (relativística)  $F$  constante

$$F \equiv \frac{d}{dt}(\gamma_p m u) \text{ , portanto:}$$

$$F \cdot dt = d(\gamma_p m u)$$

Integrando cada lado:  
(Lembre-se,  $F$  é constante!)

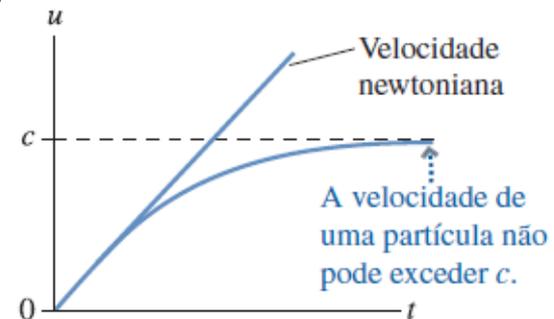
$$F t = \gamma_p m u = p$$

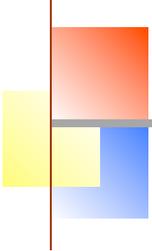
Dividindo por  $\gamma_p$  e elevando ao quadrado:

$$m^2 u^2 = \frac{F^2 t^2}{\gamma_p^2} = F^2 t^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)$$

Juntando termos em  $u^2$  e resolvendo para  $u$ :

$$u(t) = \frac{F c t}{\sqrt{(F t)^2 + (m c)^2}}$$





# Energia relativística

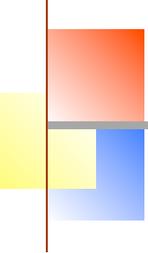
---

Como fizemos com o momento linear, queremos uma nova definição **relativística** para a energia  $E$ , que satisfaça duas condições:

1. Para velocidades baixas ( $v \ll c$ ), a nova definição de  $E$  deve concordar com a definição clássica (\*)

(\*) possivelmente a menos de uma constante, já que na física clássica sempre podemos escolher o 'zero' de energia de forma arbitrária.

2. A energia total ( $\sum E$ ) de um sistema isolado deve ser conservada em todos os referenciais inerciais



# Energia cinética clássica

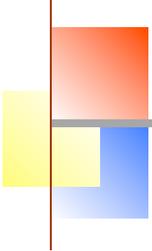
---

Recordando Fís I: a **energia cinética**  $K$  de uma partícula de velocidade  $\mathbf{u}$  equivale ao trabalho  $W$  realizado por uma força  $\mathbf{F}$  conservativa que acelera a partícula desde o repouso até essa vel. final  $\mathbf{u}$ :

$$K = \int_{\text{repouso}}^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Checando: usando a definição clássica:  $\vec{F} \equiv \frac{d}{dt}(m\vec{u})$ ,

Chega-se à expressão familiar  $K = \frac{1}{2} m u^2$

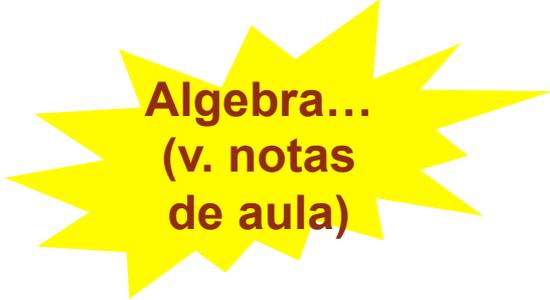


# Energia cinética relativística

Definição: a **energia cinética**  $K$  de uma partícula de velocidade  $\mathbf{u}$  equivale ao trabalho  $W$  realizado por uma força [relativística]  $\mathbf{F}$  conservativa que acelera a partícula desde o repouso até essa vel. final  $\mathbf{u}$ :

$$K = \int_{\text{repouso}}^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Using a definição relativística:  $\vec{F} \equiv \frac{d}{dt}(\gamma_p m \vec{u})$



Algebra...  
(v. notas  
de aula)

chega-se à expressão:

$$K = \gamma_p mc^2 - mc^2 = (\gamma_p - 1)mc^2$$

**Energia cinética relativística para uma partícula**

# Energia cinética relativística

$$K = \gamma_p mc^2 - mc^2 = (\gamma_p - 1)mc^2$$

Checando: para  $u \ll c$ , podemos aproximar  $\gamma_p$  usando a expansão

$$\gamma_p \approx 1 + \frac{1}{2} u^2/c^2$$

$$\rightarrow K \approx (1 + \frac{1}{2} u^2/c^2 - 1) mc^2 = \frac{1}{2} mu^2$$

Portanto, para baixas velocidades recuperamos a expressão Newtoniana !



**Equivalentemente: se  $K \ll mc^2$ , podemos tratar o movimento da partícula usando física não-relativística**

# Equivalência Massa-Energia

Já vimos que é possível converter energia luminosa em massa.

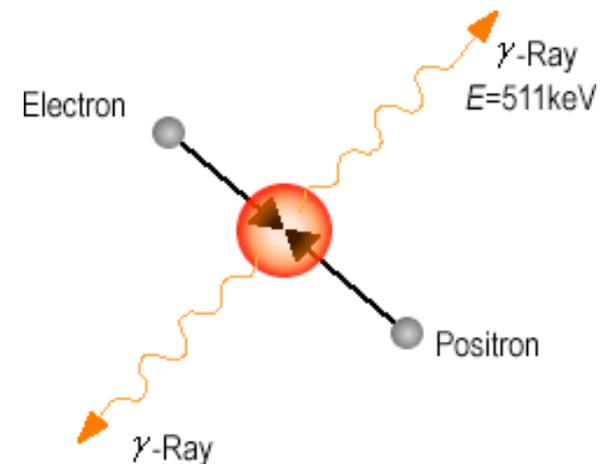
Na verdade isso é possível **para qualquer forma de energia**: uma qtd de energia  $E$  pode ser convertida em massa  $m = E / c^2$ .

O processo contrário tb é possível: **qualquer massa  $m$**  pode ser **convertida em energia**, a uma taxa  $E_0 = mc^2$ . Chamamos esse valor de **energia de repouso** do corpo

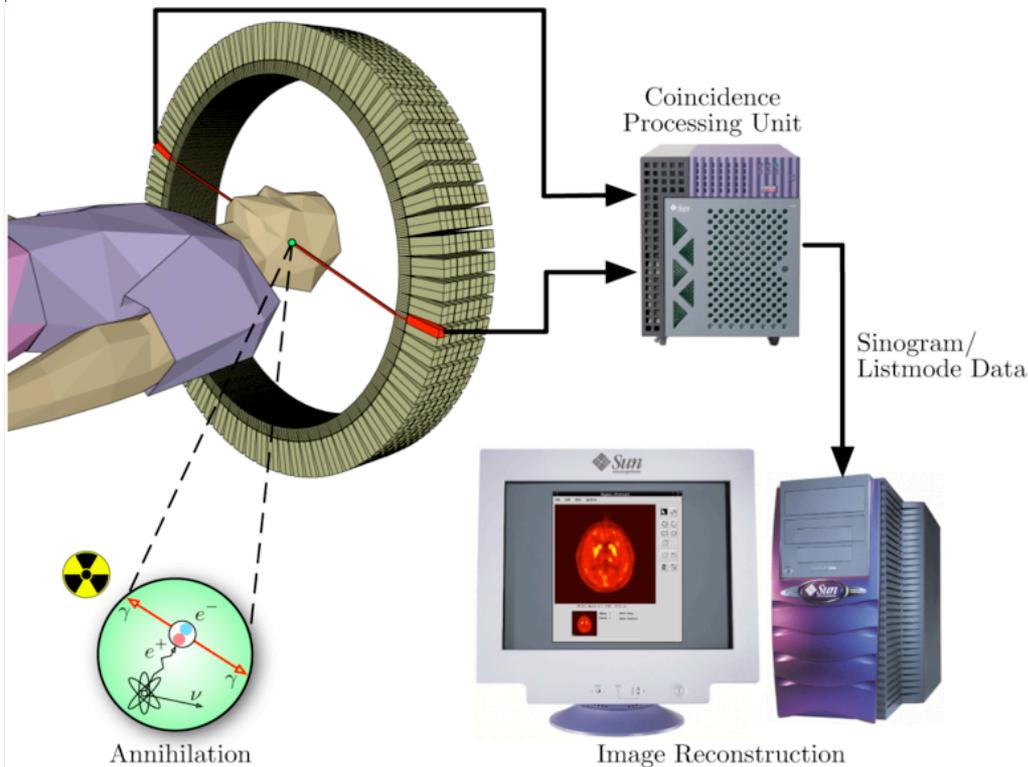
obs: até onde se sabe, o único processo físico onde essa conversão completa ocorre é a **aniquilação matéria-antimatéria**

**Ex: um elétron pode se aniquilar com um pósitron, produzindo 2 raios- $\gamma$**

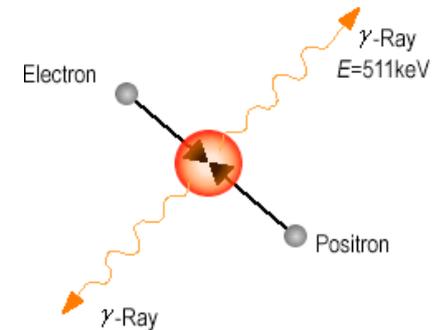
**P: por que têm de ser 2?**



# Tomografia por emissão de pósitrons



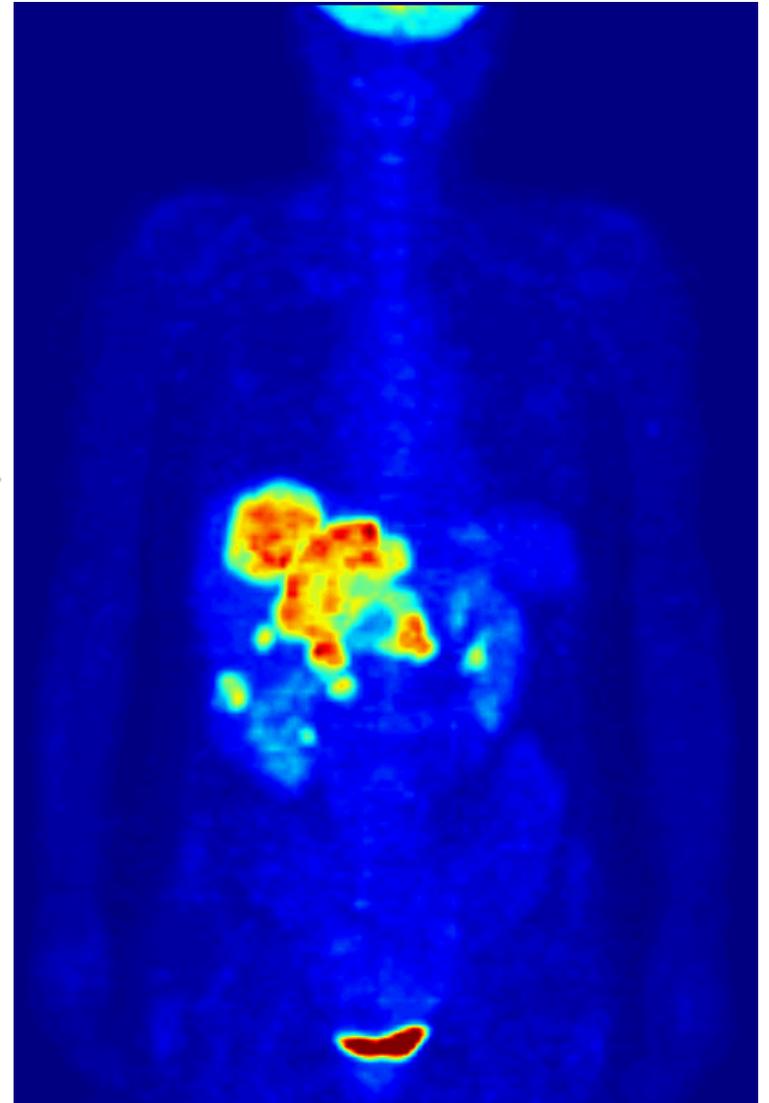
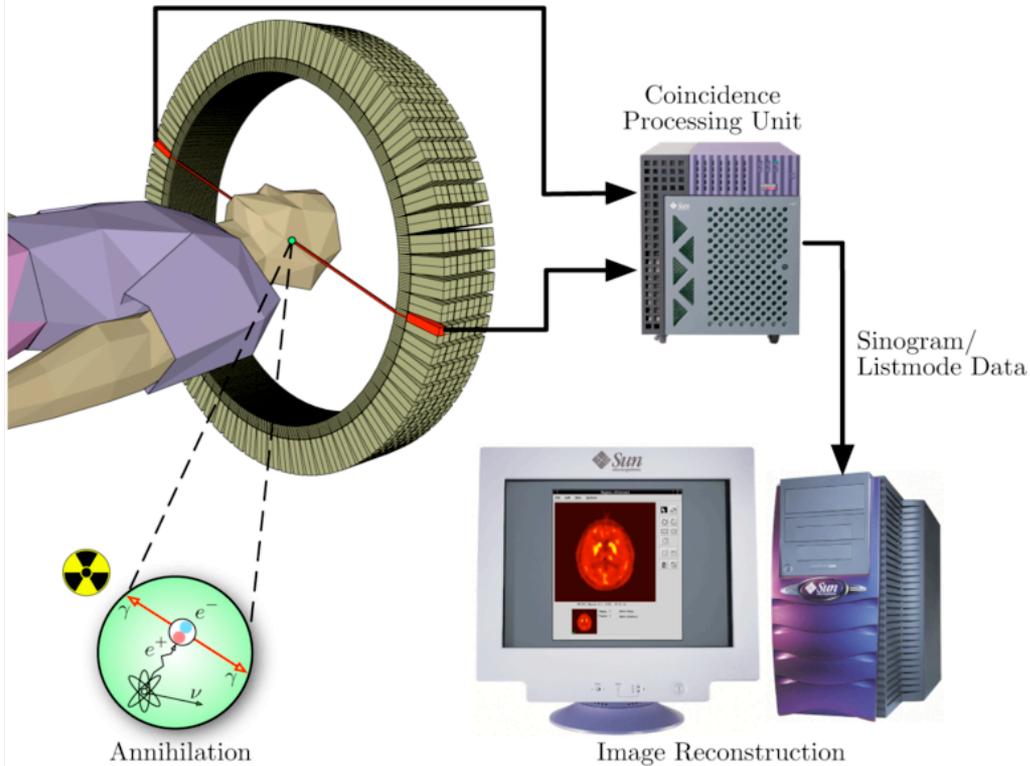
- A pessoa ingere um composto radioativo ('traçador') que se acumula preferencialmente em certos tecidos, e decai emitindo um pósitron  $e^+$ .
- Ao encontrar um elétron, ambos se aniquilam, produzindo um sinal característico de 2 raios- $\gamma$ .



obs: não confundir com tomografia computadorizada (CAT-scan), que é baseada em raios-X

- Detectando os raios em coincidência, determina-se o ponto de origem

# Tomografia por emissão de pósitrons



# Energia de repouso

**P:** Se você pudesse converter completamente 1kg de massa em energia, obteria uma quantidade semelhante à energia

a) obtida queimando 1 Tonelada de petróleo ( $\sim 4 \times 10^{10}$  J)

b) liberada na explosão da bomba atômica de Hiroshima  
( $\sim 9 \times 10^{13}$  J)

c) consumida no ano de 2013 no Estado do RJ ( $1,4 \times 10^{17}$  J)

d) emitida pelo Sol em  $1 \mu\text{s}$  ( $3,8 \times 10^{20}$  J)

$$E_0 = mc^2 = (1 \text{ kg}) \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 9 \cdot 10^{16} \text{ J}$$

# Energia de repouso

## Aplicação: Fissão Nuclear do $^{235}\text{U}$



A massa dos produtos somados é menor do que a massa dos reagentes!

$$\Delta M = M_{\text{antes}} - M_{\text{depois}} = 3.07 \times 10^{-28} \text{ Kg.}$$

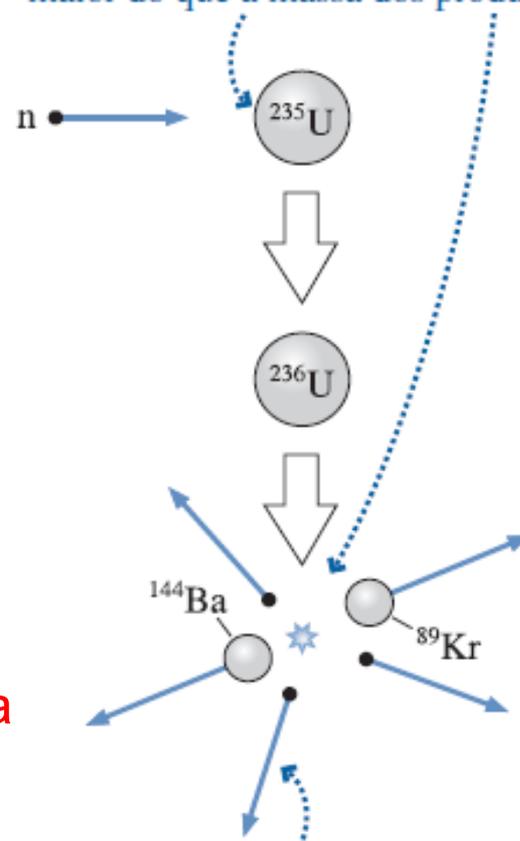
obs:  $1 \text{ u} = 1/12$  (Massa do  $^{12}\text{C}$ ) =  $1,66 \times 10^{-27} \text{ Kg.}$

**Massa 'faltante': convertida em ENERGIA**

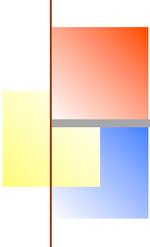
$$E_0 = (\Delta M)c^2 = 2.8 \times 10^{-11} \text{ J liberados em cada reação}$$

Com 1 mol ( $N_A = 6.02 \times 10^{23}$  átomos) obtém-se uma energia gigantesca!!

A massa dos reagentes é 0,185 u maior do que a massa dos produtos.



A massa de 0,185 u foi convertida em energia.



# Energia relativística

---

Faz sentido portanto definir, a **energia relativística total** de um corpo (incluindo as energias cinética e de repouso) como:

$$E_{Relativística} = K + mc^2 = \gamma_p mc^2$$

**Obs: Limite clássico:** para  $u \ll c$ , obtemos

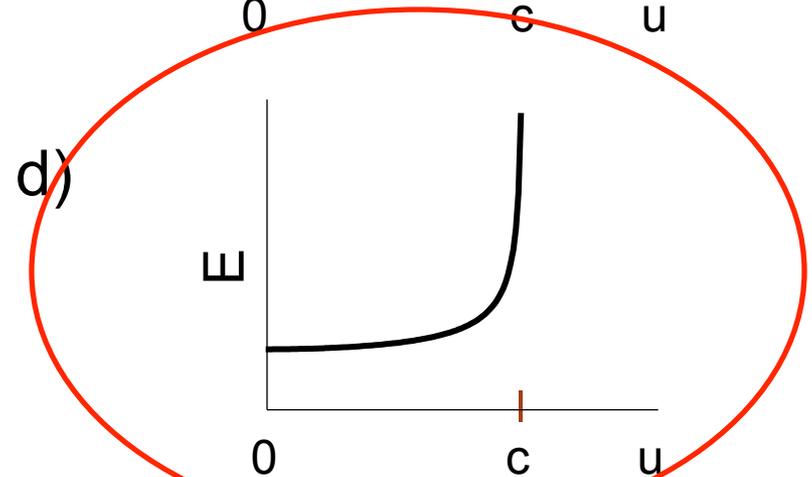
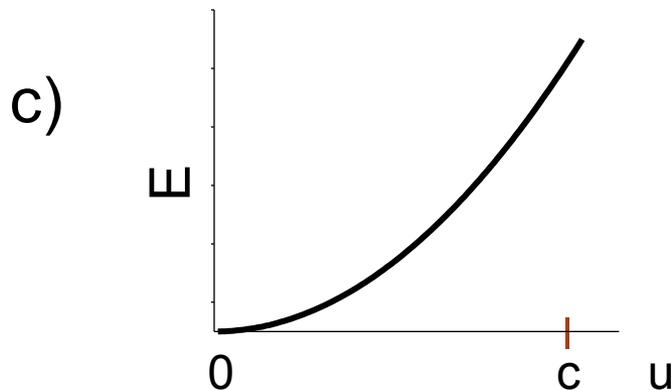
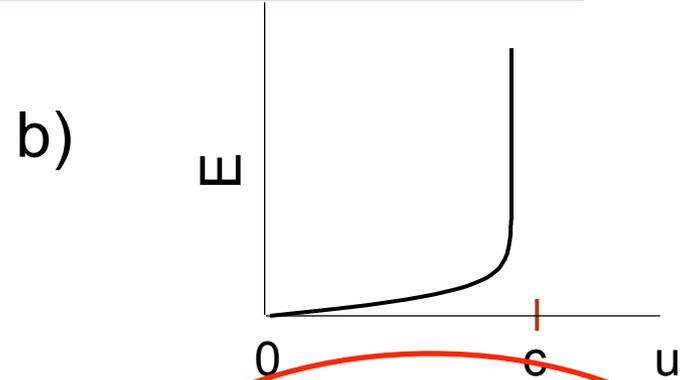
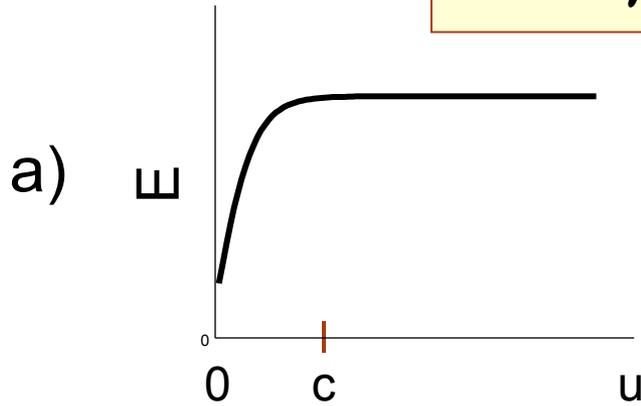
$$E_{Relativístico} \simeq mc^2 \left( 1 + \frac{u^2}{2c^2} \right) = mc^2 + E_{Newtoniano}$$

Novamente: tb podemos dizer que este limite vale quando  $K \ll E_0$

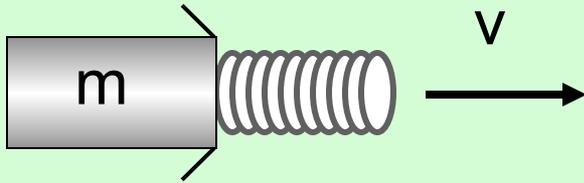
# Energia relativística

Qual gráfico representa a energia relativística total de uma partícula de massa  $m$ , em função da sua velocidade  $u$  ?

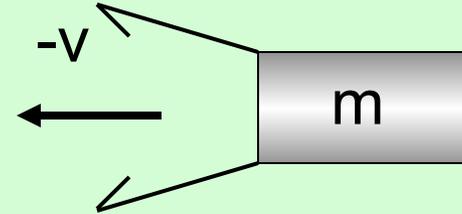
$$E = \gamma_p mc^2 = K + mc^2$$



# Equivalência de Mass e Energia



$$E_1 = \gamma mc^2 = K + mc^2$$



$$E_2 = \gamma mc^2 = K + mc^2$$

Energia Total:

$$E_{tot} = E_1 + E_2 = 2K + 2mc^2$$

# Equivalência de Massa e Energia



A conservação da energia total requer que a energia final  $E_{tot,final}$  seja igual à energia  $E_{tot,ini}$  antes da colisão. Portanto:

$$E_{tot,final} = Mc^2 = 2K + 2mc^2 = E_{tot,ini}$$

Vemos que a massa total  $M$  do sistema final é maior que a soma das massas das duas partes!  $M > 2m$ .

**A energia potencial dentro de um objeto contribui para sua massa!!!**

# Energia e Momento linear relativísticos

$$P_{relat} = \gamma_p m u ; \quad E_{relat} = \gamma_p m c^2$$

Relação útil ligando momento e energia para 1 partícula  
(generaliza a expressão Newtoniana  $K = P^2 / 2m$ )

$$E_{relat} = \sqrt{m^2 c^4 + P_{relat}^2 c^2}$$

Vale em qualquer referencial inercial

$$\begin{aligned} \text{Prova: } E_{relat}^2 &= \gamma_p^2 m^2 c^4 = m^2 c^4 \left( \frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right) = m^2 c^4 \left( 1 + \frac{u^2}{c^2 - u^2} \right) \\ &= m^2 c^4 + \frac{m^2 u^2 c^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} = m^2 c^4 + P_{relat}^2 c^2 \end{aligned}$$

# Energia e Momento linear relativísticos

$$P_{relat} = \gamma_p m u ; \quad E_{relat} = \gamma_p m c^2$$

**P:** como essas quantidades se transformam quando realizamos uma transformação de Lorentz?

Considere 1 partícula se movendo de  $(x, t)$  para  $(x + dx, t + dt)$  em um ref.  $S$ . Vamos transformar as expressões  $P_{relat}$  e  $E_{relat}$  acima para um ref.  $S'$  se movendo com vel.  $v$  com relação a  $S$ :

$$\frac{m}{d\tau} dx' = \frac{m}{d\tau} \gamma_p (dx - v dt)$$

$$\frac{m c^2}{d\tau} dt' = \frac{m c^2}{d\tau} \gamma_p (dt - v dx/c^2)$$

$$P'_{relat} = \gamma (P_{relat} - v E_{relat} / c^2)$$

$$E'_{relat} = \gamma (E_{relat} - v P_{relat})$$

Transformações de Lorentz para momento e energia Relativísticos

# Energia e Momento linear relativísticos

$$P_{relat} = \gamma_p m u ; \quad E_{relat} = \gamma_p m c^2$$

**P:** como essas quantidades se transformam quando realizamos uma transformação de Lorentz?

Considere 1 partícula se movendo de  $(x, t)$  para  $(x + dx, t + dt)$  em um ref.  $S$ . Vamos transformar as expressões  $P_{relat}$  e  $E_{relat}$  acima para um ref.  $S'$  se movendo com vel.  $v$  com relação a  $S$ :

Obs: Para um sistema de  $n$  partículas, somando essas transformações sobre todas as partículas, vemos que elas valem também para o momento e energia **totais** do sistema

$$P'_{relat} = \gamma (P_{relat} - v E_{relat} / c^2)$$

$$E'_{relat} = \gamma (E_{relat} - v P_{relat})$$

Transformações de Lorentz para momento e energia Relativísticos

# Energia e Momento linear relativísticos

**Consequencia:** se, num dado referencial  $S$  observarmos que um sistema satisfaz

$$P^i_{relat} = P^f_{relat} \quad \text{e} \quad E^i_{relat} = E^f_{relat}$$

então um observador no ref.  $S'$  também observará que

$$P'^i_{relat} = P'^f_{relat} \quad \text{e} \quad E'^i_{relat} = E'^f_{relat}$$

Obs: Para um sistema de  $n$  partículas, somando essas transformações sobre todas as partículas, vemos que elas valem também para o momento e energia **totais** do sistema

$$P'_{relat} = \gamma (P_{relat} - vE_{relat}/c^2)$$

$$E'_{relat} = \gamma (E_{relat} - vP_{relat})$$

Transformações de Lorentz para momento e energia Relativísticos

# Energia e Momento linear relativísticos

**Consequencia:** se, num dado referencial  $S$  observarmos que um sistema satisfaz

$$P^i_{relat} = P^f_{relat} \quad \text{e} \quad E^i_{relat} = E^f_{relat}$$

então um observador no ref.  $S'$  também observará que

$$P'^i_{relat} = P'^f_{relat} \quad \text{e} \quad E'^i_{relat} = E'^f_{relat}$$

Com essas definições de  $P$  e  $E$ , a conservação de momento e energia torna-se uma propriedade física que **independe da escolha do referencial inercial**, obedecendo assim ao Princípio da Relatividade